MAT 193: Algèbre linéaire

Chapitre I: Algèbre matricielle

Le but de ce chapitre est d'étudier les opérations et les propriétés de matrices. Applications des matrices se trouvent dans la plupart des domaines scientifiques et du génie. En informatique et en infographie, elles sont utilisées pour classer l'importance des pages web, pour représenter des couleurs et pour projeter une image en 3 dimensions sur un écran en 2 dimensions.

Partout dans ce cours, on désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers, par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1.1. Polynômes

1.1.1. Définition. Soit un polynôme réel de degré n suivant:

$$f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0, \text{ où } c_n \neq 0.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(a) = c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 \in \mathbb{R}.$$

On dit que a est une *racine* de $f(x)$ si $f(a) = 0$.

Exemple. Si $f(x) = 3x^2 + 6$, alors $f(x)$ n'a aucune racine réelle.

1.1.2. Proposition. Soit $f(x)$ un polynôme réel de degré n. Alors $a \in \mathbb{R}$ est une racine de $f(x)$ si et seulement si $f(x) = (x - a)g(x)$, avec $g(x)$ un polynôme réel de degré $n - 1$. Par conséquent,

(1) $f(x)$ admet au plus n racines réelles; et

(2) $f(x)$ admet n racines réelles $a_1, \ldots, a_n$ (incluant les multiplicités) si et seulement si

$$f(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_n),$$

où c est le coefficient de x^n.

Il n'y a pas de règle pour trouver les racines d'un polynôme réel général. Néanmoins, on a le résultat suivant pour les polynômes de degré deux.

1.1.3. Proposition. Soit un polynôme réel de degré deux.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ où } a \neq 0.$$

Alors $f(x)$ admet une racine réelle si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$; et dans ce cas, $f(x)$ admet deux racines réelles suivantes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exercice. Factoriser, si possible, les polynômes suivants:

Le résultat suivant est très pratique pour trouver des racines d'un polynôme entier.

1.1.4. Proposition. Soit un polynôme à coefficients entiers

$$f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ est une racine de $f(x)$, alors $q \in \mathbb{Z}$ est un diviseur de c_0.

Exercice. Factoriser $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

1.2. Matrices

Le but de cette section est d'introduire les opérations arithmétiques sur les matrices et d'étudier leurs propriétés. En tant qu'application, on parlera de coordonnées RVB des couleurs numériques et de la distribution de la population.

1.2.1. Définition. Une *matrice réelle* de type $m \times n$ est un tableau de mn nombres réels rangés sur m lignes et n colonnes comme suit:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_m \end{array} \end{array}$$

On appelle a_{ij} le (i,j)-*terme* où i est l'*indice de ligne* et j est l'*indice de colonne*.

La matrice est dite *nulle*, notée $0_{m\times n}$, si $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Deux matrices sont dites *égales* si elles sont du même type et les termes en même position sont égaux.

Si $m = n$, alors la matrice est dite *carrée d'ordre* n; et les termes $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les *termes diagonaux*.

La matrice s'appelle une *matrice-ligne* si $m = 1$; et une *matrice-colonne* si $n = 1$.

Une matrice carrée (a) d'ordre 1 sera identifiée avec le nombre a.

Notation. On désignera par $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de type $m \times n$; et par $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

En tant qu'une première application de matrices, on parlera de la couleur numérique.

1.2.2. Définition. Une couleur numérique est déterminée par trois nombres réels r, v, b entre 0 et 1, appelés *coordonnées RVB*, qui donnent les intensités du rouge, du vert, et du bleu, respectivement. Une telle couleur numérique est représentée par une matrice-colonne

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix}.$$

Dorénavant, on identifiera une couleur à la matrice-colonne de ses coordonnées RVB.

À titre d'exemple, on a le tableau suivant:

rouge	vert	bleu	blanc	noir	cyan	magenta	jaune	gris	pourpre
1	0	0	1	0	0	1	1	$\frac{1}{3}$	$0,6$
0	1	0	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	0
0	0	1	1	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	1

On introduira des opérations arithmétiques de matrices.

1.2.3. Définition. Soient $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. On définit
(1) $a \cdot A = (aa_{ij})_{m\times n} = A \cdot a$, pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(2) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$;
(3) $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$.

Remarque. Si A et B ne sont pas du même type, alors ni $A + B$ ni $A - B$ n'est défini.

Les opéatrations matricielles définies dans la définition 1.2.3 satisfont aux axiomes énoncés dans le résultat suivant.

1.2.4. Proposition. Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $1 \cdot A = A$;	(2) $(ab)A = a(bA)$;
(3) $(a \pm b)A = aA \pm bA$;	(4) $a(A \pm B) = aA \pm aB$;
(5) $A + 0_{m\times n} = A$;	(6) $A - A = 0_{m\times n}$;
(7) $A + B = B + A$;	(8) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

On introduira la multiplication matricielle dans la définition suivante.

1.2.5. Multiplication. (1) Le produit d'une matrice de type $1 \times n$ et une matrice de type $n \times 1$ est une matrice de type 1×1 définie par

$$(a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(2) Si $A = (a_{ik}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{kj}) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, alors le *produit* de A et B est défini par $AB = (c_{ij})_{m\times p}$, où

$$c_{ij} = (a_{i1} \ \cdots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{pmatrix} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p.$$

Remarque. (1) Si $A = 0_{m\times n}$ ou $B = 0_{n\times p}$, alors $AB = 0_{m\times p}$.
(2) Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice. Donner le (1,2)-terme du produit AB, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1.2.6. Définition. Pour tout entier $n \geq 1$, la matrice carrée

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

s'appelle *matrice-identité* d'ordre n.

Exemple.

$$I_1 = (1); \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.7. Proposition. Si A, B, C des matrices réelles et $a, b \in \mathbb{R}$.
(1) Si AB et BC est défnis, alors $(AB)C = A(BC)$.
(2) Si A est défini, alors $(aA)(bB) = (ab)(AB)$.
(3) Si AB, AC sont définis de même type, alors $A(B + C) = AB + AC$.
(4) Si AC, BC sont définis de même type, alors $(A + B)C = AC + BC$.

(5) Si A est de type $m \times n$, alors $I_m A = A = A I_n$.

Remarque. (1) La multiplication matricielle n'est pas commutative.

(2) Le produit AB peut être nul sans que A ou B est nulle.

(3) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des matrices telles que $A_i A_{i+1}$ est défini pour $i = 1, \ldots, n-1$, on définit alors

$$A_1 A_2 \cdots A_n = (\cdots (A_1 A_2) \cdots A_{n-1}) A_n.$$

On va donner deux résultats qui facilitent le calcul du produit de deux matrices. On commence par le cas où le facteur à droite est une matrice-colonne.

1.2.8. Proposition. Soit A une matrice réelle dont les colonnes sont $A_1, \ldots, A_n$. Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 A_1 + \cdots + a_n A_n.$$

Exercice. À l'aide de la proposition 1.3.6, calculer les produits suivants:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit que le calcul d'un produit de deux matrices générales se ramème au produit traité dans la proposition précédente.

1.2.9. Proposition. Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Si $B_1, \ldots, B_p$ sont les colonnes de B, alors

$$AB = (AB_1 \cdots AB_p).$$

Exercice. À l'aide de la proposition 1.2.9, calculer AB, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. D'après la proposition 1.2.9, on a

$$AB = \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.2.10. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$ une matrice carrée réelle. On dit que A est *diagonale* si $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \le i, j \le n$ avec $i \ne j$.

Exemple. La matrice suivante est diagonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

En appliquant les propositions 1.2.8 et 1.2.9, on obtient le résultat suivant.

1.2.11. Proposition. Soit $A = (A_1, \cdots, A_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ partagée en colonnes. Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = (a_1 A_1, \cdots, a_n A_n).$$

Exercice. À l'aide de la proposition 1.2.11, calculer le produit suivant:

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2.12. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{m\times n}$. On définit la *transposée* de A comme suit:

$$A^T = (a'_{ij})_{n\times m}, \text{ où } a'_{ij} = a_{ji}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.$$

Remarque. (1) La i-ième ligne de A^T est la transposée de la i-ième colonne de A;
(2) La j-ième colonne de A^T est la transposée de la j-ième ligne de A.

Exercice. À l'aide de la remarque ci-haut, trouver les transposées des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.13. Proposition. Soient A, B des matrices réelles et $a \in \mathbb{R}$.
(1) $(A^T)^T = A$.
(2) $(aA)^T = aA^T$.
(3) Si A, B sont de même type, alors $(A + B)^T = A^T + B^T$.
(4) Si AB est défini, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice. Vérifier que $(AB)^T = B^T A^T$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.14. Définition. Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{n\times n}$ est dite *symétrique* si $A^T = A$, c'est-à-dire, $a_{ji} = a_{ij}$, pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

Remarque. Une matrice diagonale est symétrique.

Exercice. Laquelle de A, B est symétrique?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.3. Rang

Le but de cette section est d'introduira la notion du rang d'une matrice. On commence par les matrices échelonnées et les opérations élémentaires sur les lignes de matrices.

1.3.1. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{m\times n}$ une matrice de lignes $L_1, \ldots, L_m$. On dit que A est *échelonnée* si, pour tout $i = 2, \ldots, m$, la condition suivante est vérifiée:

Si L_i est non nulle et son premier terme non nul est a_{i,j_i}, alors L_{i-1} est non nulle et son premier terme non nul est $a_{i-1,j_{i-1}}$ avec $j_{i-1} < j_i$.

Dans ce cas, le premier terme non nul d'une ligne non nulle de A s'appelle le *pivot* de cette ligne.

Remarque. Si $A_{m\times n}$ est échelonnée, alors chaque ligne, ainsi que chaque colonne, de A contient au plus un pivot. Par conséquent, le nombre de pivots de A est plus petit ou égal à $\min\{m, n\}$.

Exemple. (1) Une matrice-ligne est échelonnée.
(2) Une matrice nulle est échelonnée sans pivots.
(3) La matrice-identité d'ordre n est échelonnée ayant n pivots.

1.3.2. Définition. Les opérations *élémentaires* sur les lignes d'une matrice sont les opérations suivantes:

Type 1: Échanger deux lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$, où $i \neq j$.

Type 2: Additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne notée $L_i + aL_j$, où $i \neq j$ et $a \in \mathbb{R}$.

Type 3: Multiplier une ligne par un nombre non nul notée aL_i, où $a \neq 0$.

En outre, on dit qu'une matrice A *se réduit à* une autre matrice B si cette dernière est obtenue à partir de A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

1.3.3. Lemme. Toute opération élémentaire T sur les lignes d'une matrice est inversible. Plus précisément,

(1) Si T est $L_i \leftrightarrow L_j$, alors T^{-1} est $L_i \leftrightarrow L_j$;
(2) Si T est $L_i + aL_j$ avec $i \neq j$, alors T^{-1} est $L_i - aL_j$;
(3) Si T est aL_i avec $a \neq 0$, alors T^{-1} est $a^{-1}L_i$.

1.3.4. Corollaire. Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si A se réduit à B, alors
(1) B se réduit à A;
(2) $A = 0_{m\times n}$ si et seulement si $B = 0_{m\times n}$.

On a maintenant le résultat fondamental suivant.

1.3.5. Théorème. Si A est une matrice réelle, alors
(1) A se réduit toujours à une matrice échelonnée, appelée une *forme échelonnée* de A;
(2) les forme échelonnées de A ont le même nombre de pivots; ce nombre commun s'appelle le *rang* de A, noté $\mathrm{rg}(A)$.

Remarque. Une matrice échelonnée est une forme échelonnée d'elle-même, dont le rang est le nombre de pivots.

Exemple. $\mathrm{rg}(0_{m\times n}) = 0$ et $\mathrm{rg}(I_n) = n$.

Exercice. Trouver le rang de chacune des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant rassemble des propriétés élémentaires du rang d'une matrice.

1.3.6. Lemme. Soit A une matrice de type $m \times n$.
(1) $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.
(2) Si A se réduit à B, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
(3) $\mathrm{rg}(A) = 0$ si, et seulement si, $A = 0_{m\times n}$.
(4) $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$.

1.3.7. Proposition. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est échelonnée de n pivots, alors on peut réduire A à I_n par éliminant les termes au-dessus des pivots à partir du dernier pivot.

Exercice. Réduire la matrice échelonnée suivante à I_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.4. Inversion de matrices

On sait que tout nombre réel non nul a admet un inverse a^{-1} tel que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. D'une façon analogue, on définira la notion de l'inverse pour les matrices carrées.

1.4.1. Définition. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *inversible* s'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Dans ce cas, B s'appelle l'*inverse* de A, et notée $B = A^{-1}$.

Exemple. I_n est inversible avec $I_n^{-1} = I_n$.

On rassemble des propriétés de matrices inversibles dans le résultat suivant.

1.4.2. Lemme. Soit A une matrice inversible.
(1) A^{-1} est inversible avec $(A^{-1})^{-1} = A$.
(2) A^T est inversible avec $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
(3) Si $AB = C$, alors $B = A^{-1}C$.
(4) Si B est inversible de même ordre que A, alors AB est inversible avec

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Le résultat suivant est un critère pour une matrice carrée soit inversible.

1.4.3. Théorème. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = n$.

Exercice. Déterminer les quelles des matrices suivantes sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Voici la méthode pour inverser les matrices si possible.

1.4.4. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible.
(1) Si $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, alors $(A \mid B)$ s'échelonne à $(I_n \mid C)$, où $C = A^{-1}B$.
(2) En particulier, $(A \mid I_n)$ s'échelonne à $(I_n \mid C)$, où $C = A^{-1}$.

Exercice. En sachant que A est inversible, calculer $A^{-1}B$ et A^{-1} où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on considère les puissances d'une matrice carrée.

1.4.5. Définition. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $r > 0$, on définit

$$A^r = \overbrace{AA \cdots A}^{r \text{ fois}}.$$

En outre, si A est non nul, on pose $A^0 = I_n$. Si A est inversible, on définit

$$A^{-r} = (A^{-1})^r, \text{ pour tout } r > 0.$$

Remarque. (1) Pour tous $r, s > 0$, on a $A^r A^s = A^{r+s}$ et $(A^r)^s = A^{rs}$.
(2) Si A est inversible, alors $A^r A^s = A^{r+s}$ et $(A^r)^s = A^{rs}$, pour tous $r, s \in \mathbb{Z}$.
(3) Si $AB = BA$, alors $(AB)^r = A^r B^r$ pour tout $r > 0$.

Exercice. Calculer A^{-3}, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Supposons que le nombre de résidents au Québec est constant et que chaque année, 3% des habitants en ville déménagent à la campagne et 5% des habitants à la campagne déménagent en ville. Vérifier que

$$\begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 \\ 0,03 & 0,95 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

où v_n et c_n avec $n \geq 0$, sont les nombres de résidents en ville et à la campagne n ans après cette année, respectivement.

Démonstration. Chaque année, 97% des habitants en ville restent en ville, et 95% des habitants à la campagne restent à la campagne. Pour tout $n \geq 0$, on a un diagramme comme suit:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{v_n} \arrow[r, "0{,}97"] \arrow[dr, "0{,}03"] & \boxed{v_{n+1}} \\
\boxed{c_n} \arrow[r, "0{,}95"'] \arrow[ur, "0{,}05"'] & \boxed{c_{n+1}}
\end{tikzcd}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,97\, v_n + 0,05\, c_n \\ c_{n+1} &= 0,03\, v_n + 0,95\, c_n. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97\, v_{n-1} + 0,05\, c_{n-1} \\ 0,03\, v_{n-1} + 0,95\, c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 \\ 0,03 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 \\ 0,03 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 \\ 0,03 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 \\ 0,03 & 0,95 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

En général,

$$\begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 \\ 0,03 & 0,95 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

On conclut cette section par la décomposition LU de matrice, qui sera utile pour la résolution de systèmes d'équations linéaires.

1.4.6. Définition. Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{n\times n}$ est dite
(1) *triangulaire supérieure* si $a_{ij} = 0$, pour tous $1 \le j < i \le n$;
(2) *triangulaire inférieure* si $a_{ij} = 0$, pour tous $1 \le i < j \le n$;
(3) *triangulaire* si A est triangulaire supérieure ou inférieure.

Remarque. (1) Une matrice carrée échelonnée est triangulaire supérieure.
(2) Une matrice diagonale est triangulaire.

1.4.7. Définition. Une opération élémentaire T sur les lignes d'une matrice s'appelle *opération triangulaire inférieure* si
(1) T est de type $L_i + aL_j$ avec $i > j$, ou bien
(2) T est de type aL_i avec $a \neq 0$.

Voici des propriétés d'opérations triangulaires inférieures.

1.4.8. Lemme. (1) L'inverse d'une opération triangulaire inférieure est triangulaire inférieure.

(2) Si l'on effectue une opération triangulaire inférieure à une matrice triangulaire inférieure, alors la matrice résultante est aussi triangulaire inférieure.

1.4.9. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ admettant une réduction

$$A \xrightarrow{T_1} A_1 \xrightarrow{T_2} A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{r-1} \xrightarrow{T_r} U,$$

où les T_i sont des opérations triangulaires inférieures et U est une matrice triangulaire supérieure. Si l'on effectue les opérations T_i^{-1} à partir de I_n comme suit:

$$I_n \xrightarrow{T_r^{-1}} L_1 \xrightarrow{T_{r-1}^{-1}} L_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{r-1} \xrightarrow{T_1^{-1}} L,$$

alors L est triangulaire inférieure telle que

$$A = LU,$$

appelée une *décomposition* LU de A.

Remarque. Ce n'est pas vrai que toute matrice admet une décomposition LU.

Exercice. Donner une décomposition LU de la trice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.5. Exercices

1. Factoriser les polynômes suivants si possible.

   (1) $x^2 + 2x + 2$; (2) $x^3 + x^2 - 2$; (3) $x^6 - 3x^3 + 2$;

   (4) $x^4 - 9x^2 - 4x + 12$; (5) $x^3 - x^2 - x - 2$.

2. (**MATLAB**) Trouver les racines de $8x^4 - 30x^3 + 35x^2 - 15x + 2$.

3. Donner, à l'aide de les propositions 1.2.8 et 1.2.9, la troisième colonne du produit AB, où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

4. Calculer, ł'aide des propositions 1.2.8 et 1.2.9, les produits matriciels suivants.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & \sqrt{11} & 3 & 1 \\ 0 & 4 & \sqrt{5} & 5 & 0 & 3 \\ \sqrt{7} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2)\ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & \sqrt{11} & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer, à l'aide de la proposition 1.2.11, les produits suivants de matrices rationnelles:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 9 & 3 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Considérer deux matrices symétriques suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Trouver la condition pour que AB soit symétrique.

7. Calculer A^TA et AA^T, où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que A^TA et AA^T sont symétriques.

9. Montrer, pour toute matrice A, que AA^T et A^TA sont symétriques.

10. Soient A et B deux matrices symétriques de même type.
    (1) Montrer que $A + B$ et $A - B$ sont symétriques.
    (2) Si $AB = BA$, montrer que AB est symétrique.

11. Dans chacun des cas suivants, trouver le rang de chacun des matrices suivantes:

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Trouver, si possible, l'inverse de chacune des matrices suivantes.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 7 & 3 & 10 & -15 \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs réelles de x pour que la matrice donnée soit inversible.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5-x & 1 \\ 2 & 4 & x+3 \end{pmatrix}.$$

14. En sachant que A est inversible, trouver $A^{-1}B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Dans chacun des cas suivants, calculer A^{-3}.

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

16. (**MATLAB**) Trouver les valeurs réelles de x telles que la matrice A soit inversible, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 10 & -27 & 20 & -3 \end{pmatrix}.$$

17. (**MATLAB**) Supposer que le nombre de résidents du Québec est constant; et chaque année, 2% des habitants en ville déménagent à la campagne, et 4% des habitants à la campagne déménagent en ville. Si les nombres de personnes qui habitaient en ville et à la compagne en 2000 étaient 5 millions et 2 millions respectivement, quels seront les nombres de personnes qui habiteront en ville et à la compagne en 2020?

18. Trouver une décomposition LU de chacune des matrices suivantes:

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Chapitre II: Déterminants

À chaque matrice carrée, on associe un nombre, appelé son *déterminant*. Ceci sera appliqué pour déterminer si une matrice carrée est inversible et pour calculer les valeurs propres d'une matrice carrée. En géométrie, on utilise le déterminant pour calculer l'aire d'un parallélogramme et le volume d'un parallélépipède.

2.1. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Le *déterminant* de A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est un nombre réel défini par récurrence comme suit.

Si $n = 1$, on définit alors $\det(a_{11}) = a_{11}$.

Supposons que $n > 1$ et le déterminant de toute matrice carrée d'ordre $n - 1$ est défini.

Pour tous $1 \le i, j \le n$, désignons par M_{ij} la sousmatrice de A obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne. Par l'hypothèse de récurrence, $m_{ij} = \det(M_{ij})$ est défini, appelé *mineur* de A d'indices i, j.

(1) Si l'on développe suivant la i-ième ligne de A, alors

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}m_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}m_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}m_{in}.$$

(2) Si l'on développe suivant la j-ième colonne de A, alors

$$\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}m_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}m_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}m_{nj}.$$

Le calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 est evident.

2.2. Proposition.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exercice. Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

On étudiera comment calculer le déterminant d'une matrice de grande taille. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition.

2.3. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de lignes $L_1, \ldots, L_n$ et de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.

(1) Si $C_j = aC'$ avec $a \in \mathbb{R}$ et C' une matrice-colonne, pour un certain $1 \le j \le n$, alors

$$\det(A) = a \cdot \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C', C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

(2) Si $L_i = aL'$ avec $a \in \mathbb{R}$ et L' une matrice-ligne, pour un certain $1 \le i \le n$, alors

$$\det(A) = a \cdot \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

(3) En particulier, si A a une ligne nulle ou une colonne nulle, alors $\det(A) = 0$.

Exercice. Calculer

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

On étudiera comment calculer le déterminant d'une matrice carrée de grande taille. Le premier résultat est de réduire la taille de certains matrices spéciales.

2.4. Proposition. Si A et B sont des matrices carrées, alors

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}.$$

Exercice. Calculer

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.

2.5. Proposition. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

Exemple. $\det(I_n) = 1$.

On sait que toute matrice carrée se réduit à une matrice triangulaire supérieure. Donc le résultat suivant nous dit que le calcul du déterminant d'une matrice générale se réduit au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

2.6. Théorème. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(1) Si B est obtenue en échangeant deux lignes (respectivement, deux colonnes) de A, alors $\det(A) = -\det(B)$.

(2) Si B est obtenue en additionnant un multiple d'une ligne (respectivement, colonne) de A à une autre ligne (respectivement, colonne) de A, alors $\det(A) = \det(B)$.

(3) Si B est obtenue en multipliant une ligne (respectivement, colonne) de A par un nombre non nul $a \in \mathbb{R}$, alors $\det(A) = a^{-1} \cdot \det(B)$.

Exercice. À l'aide du théorème 2.6, calculer les déterminants suivants:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}; \qquad (2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le résultat suivant rassemble des propriétés importants de détermiant de matrices.

2.7. Théorème. Pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a
(1) $\det(A) = \det(A^T)$;
(2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
(3) $\det(A^r) = (\det(A))^r$, pour tout entier $r \geq 1$.

Exercice. À l'aide de la décomposition LU, calculer le détermineant suivant:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est très pratique pour déterminer si une matrice est inversible ou non.

2.8. Théorème. Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$; et dans ce cas, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a

$$\det(A^r) = (\det(A))^r.$$

Exercice. Pour quelles valeurs de x, la matrice suivante est inversible?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 1 & -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.9. Corollaire. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. S'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, alors A est inversible avec $A^{-1} = B$.

2.10. Exercices

1. Calculer les détermiants suivants.

$$(1) \begin{vmatrix} 3+\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 1+\sqrt{3} \\ 0 & 4+\sqrt{2} & 5 \end{vmatrix}; \qquad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer, à l'aide de la proposition 2.3, le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

3. Trouver premièrement une décomposition LU de A, et en calculer $\det(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{7} & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & \sqrt{11} & \sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{13} & \sqrt{11} & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant de la matrice donnée et donner les valeurs réelles de a pour que la matrice soit inversible.

$$(1)\ \begin{pmatrix} a+1 & 3 & 4 \\ a & 2 & 2 \\ 4 & 3 & a \end{pmatrix}; \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & a & a \\ 1 & 3 & a & 5 \end{pmatrix}; \quad (3)\ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Montrer, pour toute valeur réelle de x, que la matrice suivante est inversible.

$$\begin{pmatrix} x & -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & x & 3 & 3 \\ 0 & 0 & x+\sqrt{3} & 3 \\ 0 & 0 & -2 & x-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Indice: Le déterminant de la matrice est un polynôme en x, trouver ses racines.

7. Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant de A, en détuire si A est inversible ou non, et trouver $\det(A^{-3})$ lorsque A est inversible.

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 9 & 3 & -3 & 15 \\ 6 & 7 & -8 & 10 \\ -3 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(1) Pour toute valeur réelle de a, montrer que A est inversible. *Indice*: Calculer AA^T et appliquer le théorème 2.7.

(2) Calculer $\det(A^{-2})$.

Chapitre III: Systèmes d'équations linéaires

La résolution de systèmes d'équations linéaires apparaît dans beaucoup de domaines, comme en traitement numérique du signal, en optimisation linéaire et en analyse numérique. Dans ce chapitre, on étudiera les propriétés et la résolution de tels systèmes.

3.1. Définition. Un système d'équations linéaires sur $\mathbb{R}$ est un ensemble d'équations linéaires comme suit:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}. \end{array}$$

On appelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les *inconnues*; a_{ij} les *coefficients*; et b_i, les *termes constants*.

Une solution de ce système est un n-uplet $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in \mathbb{R}$, tel que

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i, \; i = 1, \ldots, m.$$

Le système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution; et sinon, *incompatible*.

Deux systèmes d'équations linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple. Considérons trois plans affines de l'espace définis par les équations

$$x + y - z = 1; 2x + y - z = 1; 3x + 2y - z = 2,$$

respectivement. Les points d'intersection de ces plans sont donnés par les solutions du système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 2. \end{array}$$

On verra que ce système a une seule solution $(0, 1, 0)$.

Exercice. Un grand sapin coûte 3 dollars et 3 petits sapins coûtent un dollar. Si l'on veut acheter 100 sapins avec 100 dollars, combien de petits sapins et combien de grands sapins doit-t-on acheter?

Solution. Si l'on achète x grands sapins et y petits sapins, alors

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 100 \\ 3x & + & \frac{1}{3}y & = & 100. \end{array}$$

On verra que ce système est compatible ayant une seule solution $x = 25$ et $y = 75$.

On utilisera la théorie des matrices pour étudier les systèmes d'équations linéaires. Pour ce faire, on introduira la notion suivante.

3.2. Définition. Soit un système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

s'appellent la *matrice des coefficients*; et la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

s'appelle la *matrice augmentée*. Le système $(*)$ est équivalent à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (**)$$

de sorte que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une solution du système $(*)$ si, et seulement si, la colonne

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation matricielle $(**)$.

Dès maintenant, un système de m équations linéaires à n inconnues sera noté comme une équation matricielle

$$AX = B,$$

où $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Le but est résoudre un tel système, c'est-à-dire,

(1) déterminer si le système est compatible ou incompatible;
(2) trouver toutes les solutions s'il est compatible.

On commence par un cas spécial où la matrice des coefficients du système est inversible.

3.3. Proposition. Soit $AX = B$ un système d'équations linéaires sur $\mathbb{R}$. Si A est inversible, alors le système admet une seule solution, ce qui est donnée par

$$X = A^{-1}B.$$

Exercice. En inversant la matrice des coefficients, résoudre le système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 6 \\ 3x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 4y & - & z & = & -6. \end{array}$$

Ensuite, on étudiera la résolution de certains systèmes asset simples, c'est-à-dire, les systèmes échelonnés tels que définis ci-dessous.

3.4. Définition. Un système d'équations linéaires à n inconnues

$$AX = B$$

est dit *échelonné* si $(A|B)$ est échelonnée. Dans ce cas, A est échelonnée avec $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(A|B)$; en outre,
(1) une inconnue est dite *libre* si aucun de ses coefficients n'est un pivot de A;
(2) le nombre d'inconnues libres est égal à $n - \mathrm{rg}(A)$.

Exemple. (1) Le système

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \boxed{2x_1} & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & \boxed{5x_3} & + & x_4 & + & 5x_5 & = & -1 \\ & & & & & & \boxed{7x_4} & & & = & -8 \end{array}$$

est échelonné. En effet la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{2} & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 0 & -8 \end{array}\right)$$

est échelonnée. Les pivots de la matrice des coefficients sont $2, 5$ et 7 qui sont coefficients de x_1, x_3 et x_4 respectivement. Donc les inconnues libres sont x_2 et x_5.

(2) Le système

$$0x_1 + \boxed{3x_2} - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 1$$

est échelonné. Les inconnues libres sont x_1, x_3, x_4 et x_5.

(3) Le système

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & \boxed{5y} & - & 5z & = & -15 \\ & & & & \boxed{-2z} & = & -4 \end{array}$$

est échelonné sans inconnue libre.

(4) Les systèmes suivants ne sont pas échelonnés.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 3; \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ 2x & & & + & z & = & 3. \end{array}$$

Le résultat suivant nous dit comment résoudre un système échelonné d'équations linéaires.

3.5. Proposition. Soit $AX = B$ un système échelonné d'équations linéaires. Si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|B)$, alors le système est incompatible.

3.6. Proposition. Soit $AX = B$ un système échelonné d'équations linéaires à n inconnues. Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = n$, alors le système admet une seule solution, ce qui peut être trouvée par substitution successivement à partir de la dernière équation non nulle.

Exercice. Résoudre le système échelonné suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ & & & & 3z & = & 6 \\ & & & & 0z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 0. \end{array}$$

3.7. Théorème. Soit un système échelonné d'équations linéaires à n inconnues

$$AX = B.$$

Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) < n$, alors

(1) le système a des inconnues libres $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$ avec $s = n - \mathrm{rg}(A)$;

(2) le système a une infinité de solutions qui sont en bijection avec les s-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, de la façon suivante :

> Étant donné $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, on pose $x_{j_l} = \lambda_l$, $l = 1, \ldots, s$. En déplaçant les $a_{i,j_l}\lambda_j$ à droite, on obtient un système échelonné sans inconnues libres. En résolvant ce dernier par substitution, on trouve les valeurs pour les inconnues non libres. Cela donne la solution du système original correspondant à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$.

Exercice. Résoudre le système échelonne suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & -1 \\ & & & & & & 7x_4 & & & = & -8. \end{array}$$

La stratégie de la résolution d'un système général consiste à réduire le système à un autre système plus simple sans changer l'ensemble des solutions.

3.8. Théorème. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires n'est pas changé par les *opérations élémentaires* suivantes:
Type 1: Échanger deux équations, notée $E_i \leftrightarrow E_j$.
Type 2: Additionner à une équation un multiple d'une autre équation, notée $E_i + aE_j$.
Type 3: Multiplier une équation par un nombre non nul a, notée aE_i.

Remarque. Effectuer une opération élémentaire sur les équations d'un système est équivalent à effectuer une opération élémentaire de même type sur les lignes de la matrice augmentée.

On voit que la nouvelle matrice augmentée est la matrice augmentée du nouveau système.

3.9. Corollaire. Soit $AX = B$ un système d'équations linéaires. Si l'on échelonne $(A|B)$ à une matrice échelonnée $(A'|B')$, alors le système original est équivalent au système échelonné $A'X = B'$.

Remarque. La méthode donnée dans le corollaire 3.9 s'appelle *élimination de Gauss.*

Exercice. Résoudre, par l'élimination de Gauss, le système

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & & & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 9. \end{array}$$

Le résultat suivant se découle des propositions 3.5, 3.6, 3.7 et le corollaire 3.9.

3.10. Théorème. Soit $AX = B$ un système d'équations linéaires à n inconnues. Le système est compatible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$; et dans ce cas,
(1) si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors le système admet une seule solution.
(2) Si $\mathrm{rg}(A) < n$, alors le système admet une infinité de solutions.

Exercice. Considérer le système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & a. \end{array}$$

Déterminer les valeurs de a pour que le système
(1) n'ait pas de solution;
(2) ait une solution unique;
(3) ait une infinité de solutions.

Solution. On voit que

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & a \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(3-a) & 3-a \end{array}\right).$$

(1) Le système n'a pas de solution si et seulement si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A \mid B)$ si et seulement si $(1-a)(3-a) = 0$ et $3 - a \neq 0$ si et seulement si $a = 1$.

(2) Le système n'a qu'une solution si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) = 3$ si et seulement si $(1-a)(3-a) \neq 0$ si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 3$.

(3) Le système admet une infinité de solutions si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) < 3$ si et seulement si $(1-a)(3-a) = 3 - a = 0$ si et seulement $a = 3$.

On conclut cette section par étudier des systèmes d'équations linéaires dont les termes constants sont tous nuls.

3.11. Définition. Un système d'équations linéaires

$$AX = B$$

est dit *homogène* si $B = 0$. Dans ce cas, $X = 0$ est une solution, appelée la *solution nulle*.

Il s'agit d'un problème très important de savoir quand un système homogène a des solutions non nulles.

3.12. Théorème. Soit un système homogène de m équations linéaires à n inconnues

$$AX = 0.$$

(1) Le système admet des solutions non nulles si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) < n$.
(2) Si $m < n$, alors le sysème admet des solutions non nulles.

Exercice. Donner la valeur de a pour que le système suivant ait des solutions non nulles.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & az & = & 0. \end{array}$$

En appliquant les théorèmes 3.12(1) et 2.8, on obtient le résultat suivant.

3.13. Corollaire. Soit $AX = 0$ un système homogène d'équations linéaires. Si A est carrée, alors le système a des solutions non nulles si et seulement si $\det(A) = 0$.

Exercice. Donner les valeurs réelles de a pour que le système suivant n'ait que la solution nulle.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & az & = & 0. \end{array}$$

3.14. Exercices

1. Considérer le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

   (1) Vérifier que la matrice des coefficients est inversible en calculant son déterminant.

   (2) Résoudre le système par inverser la matrice des coefficients (c'est-à-dire, appliquer la proposition 3.3).

2. Résoudre par l'élimination de Gauss les systèmes suivants:

   (1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0; \end{array}$$

   (2)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 1. \end{array}$$

3. Trouver le point d'intersection de trois plans affines définis par les équations cartésiennes $x + 2y - z = 1,\ 2x - y + z = 2$, et $3x + 2y - z = 3$, respectivement.

4. Considérer le système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3. \end{array}$$

   Déterminer les valeurs réelles de a pour lesquelles le système

(1) n'ait pas de solution;

(2) ait une infinité de solutions;

(3) ait une seule solution.

5. Dans chacun des cas suivants, trouver la condition pour que le système soit compatible.

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & y & - & z & = & 7 \\ -x & + & y & + & az & = & 6. \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c. \end{array}$$

6. Soient P_1, P_2, et P_3 les plans affines définis par les équations catésiennes $x + 2y + z = 1$, et $2x + 5y + az = 1$, et $x + ay + 2z = 2$, respectivement. Trouver les valeurs réelles de a pour que les trois plans se coupent, c'est-à-dire, leur intersection est non vide.

7. Pour quelle valeur de a, le système homogène

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & az & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 0, \end{array}$$

a-t-il des solutions non nulles? Si c'est le cas, trouver toutes les solutions.

8. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le système homogène admet des solutions non nulles.

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & & & = & 0; \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ 3x & & & + & 3z & = & 0; \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Chapitre IV: Espaces vectoriels

Dans les applications, beaucoup de quantités comme la chaleur et la température, peuvent être décrites par une seule variable. Mais certains d'autres quantités, comme la force et la couleur numérique, exigent plusieurs variables pour leur définition. On les appelle *quantités vectorielles*. Les quantités vectorielles différentes possèdent des propriétés communes. Par exemple, une quantité vectorielle peut être multipliée par un constant et deux quantités vectorielles de même genre peuvent être additionnées. Afin d'étudier les quantités vectorielles diverses en même temps, on introduit la notion d'espace vectoriel et on étudie celle-ci en général. En suite, on applique des résultats généraux dans des applications particulières.

4.1. Base et dimension

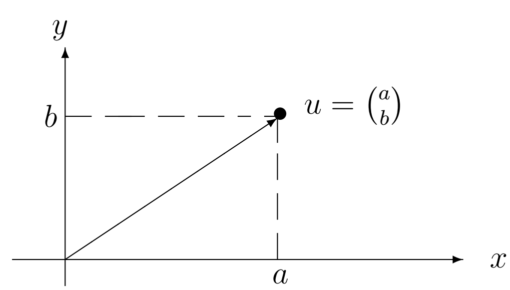
Avant introduire la notion abstraire d'un espace vectoriel, on rappelle que

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

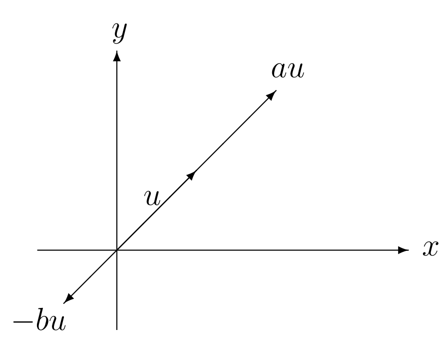
est un espace vectoriel réel. En effet, toute matrice colonne

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

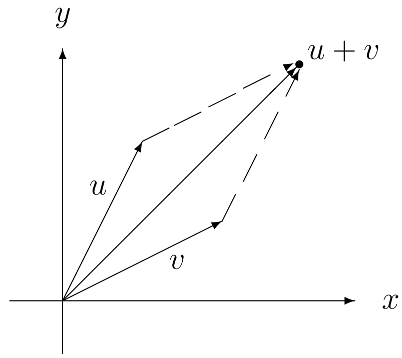
peut être représenté un vecteur du plan comme suit:



On peut multiplier un vecteur u par des nombres comme suit:



On peut aussi additionner deux vecteurs u, v comme suit:



4.1.1. Définition. On appelle les nombres réels *scalaires.* Un ensemble E, ses éléments s'appellent *vecteurs*, est dit *espace vectoriel réel* (ou bien, *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$) s'il est muni d'une multiplication par scalaires

$$\cdot : \mathbb{R} \times E \to E : (a, u) \mapsto a \cdot u$$

et d'une addition

$$+ : E \times E \to E : (u, v) \mapsto u + v$$

satisfaisant les axiomes suivants pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in E$.

(1) (associativité) $a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$;
(2) (neutralité) $1 \cdot u = u$;
(3) (commutativité) $u + v = v + u$;
(4) (associativité) $u + (v + w) = (u + v) + w$;
(5) E a un *vecteur nul*, noté 0_E, tel que $u + 0_E = u$;
(6) u admet un *opposé*, noté $(-u)$, tel que $u + (-u) = 0_E$;
(7) (distributivité) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$;
(8) (distributivité) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.

En outre, on dit que E est *nul* si $E = \{0_E\}$.

Remarque. (1) Pour tous $u, v \in E$, on définit la soustraction par

$$u - v = u + (-v).$$

(2) Pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$ avec $n > 2$, on définit

$$u_1 + \cdots + u_n = (\cdots (u_1 + u_2) + \cdots + u_{n-1}) + u_n.$$

Exemple. L'ensemble $E = \{0\}$ est un espace vectoriel réel nul, pour les opérations suivantes:

$$0 + 0 = 0, \quad a \cdot 0 = 0, \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

4.1.2. Proposition. Pour tout entier $n \geq 1$, on a un espace vectoriel réel

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

dont les opérations sont définies ci-dessous:

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Exemple. (1) Prenant $n = 1$, on voit que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, noté ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

(2) Prenant $n = 2$, on obtient le plan réel $\mathbb{R}^2$.

(3) Prenant $n = 3$, on obtient l'espace vectoriel réel usuel

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ où } \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ceci admet aussi une réalisation géométrique dans l'espace usuel de dimension 3.

(4) Une couleur numérique C dont les coorodnnées RVB sont $\{r; v; b\}$ est représentée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Doréavant, on fera l'identification suivante:

$$C = \begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix}.$$

Dès maintenant, on se fixe E un espace vectoriel réel. D'abord, on rassemble des propriétés élémentaires d'espaces vectoriels dans le résultat suivant.

4.1.3. Proposition. Les énoncés suivants sont valides pour tous $u, v, w \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
(1) Si $u + v = u + w$, alors $v = w$.
(2) $au = 0_E$ si, et seulement si, $a = 0$ ou $u = 0_E$.
(3) $(-1)u = -u$ et $-(-u) = u$.
(4) $-(u + v) = -u - v$.
(5) $u + v = w$ si, et seulement si, $u = w - v$.

La notion de combinaison linéire joue un rôle important dans l'étude d'espaces vectoriels.

4.1.4. Définition. Soient $u_1, \ldots, u_n \in E$. Un vecteur $u \in E$ est dit *combinaison linéaire* de $u_1, \ldots, u_n$ s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, appelés *coefficients*, tels que

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n.$$

Remarque. (1) 0_E est une combinaison linéaire de toute famille de vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.

(2) Une combinaison linéaire d'un vecteur v est un *multiple* av de v, où $a \in \mathbb{R}$. En particulier, v est une combinaison linéaire de v.

Exercice. Soient

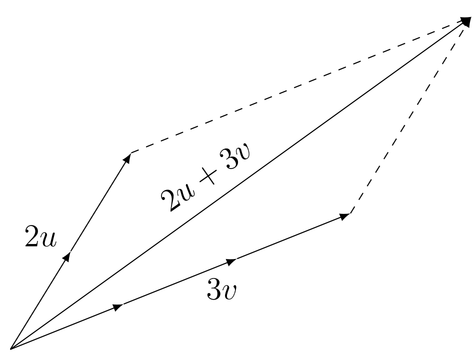
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Donner la combinaison linéaire w de u, v à coefficients $2, 3$.

Solution. Par définition,

$$w = 2u + 3v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ceci est illustré par



Exercice. Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer laquelle de u, e_3 est une combinaison linéaire de e_1, e_2.

4.1.5. Proposition. Une couleur numérique C est obtenue en mélangeant des couleurs numériques $C_1, \ldots, C_n$ si et seulement si C est une combinaison linéaire de $C_1, \ldots, C_n$ à coefficients entre 0 et 1, c'est-à-dire,

$$C = a_1 C_1 + \cdots + a_n C_n; \quad 0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1,$$

où a_i représente l'intensité, ou bien le pourcentage, de la couleur numérique C_i.

Exercice. Trouver les coordonnées RVB de la couleur numérique C obtenue en mélaneant 30% du magenta, 20% du blanc, 15% du jaune et 35% du pourpre.

Le résultat suivant nous dit que le problème d'exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs se ramène au problème de trouver une solution d'un système d'équations linéaires.

4.1.6. Lemme. Soient $u_1, \ldots, u_n; u \in \mathbb{R}^m$. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, les énoncés suivants sont équivalents.

(1) $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$.

(2) $u = (u_1 \ \cdots \ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(3) Le système $(u_1 \cdots u_n)X = u$ a pour solution

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soient

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Exprimer, si possible, u comme une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

Le résultat suivant nous un critère pour qu'un vecteur soit une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.

4.1.7. Théorème. Si $u_1, \ldots, u_n; u \in \mathbb{R}^m$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) u est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.
(2) Le système $(u_1 \cdots u_n)X = u$ est compatible.
(3) $\mathrm{rg}(u_1 \cdots u_n) = \mathrm{rg}(u_1 \cdots u_n \mid u)$.

Exercice. Déterminer si v est une combinaison linéaire ou non de v_1, v_2, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

En général, les coefficients d'une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ ne sont pas uniques. On étudiera quand les coefficients de toute combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ sont uniques.

4.1.8. Définition. Des vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in E$ sont dits
(1) *linéairement dépendants* s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0_E;$$

(2) *linéairement indépendants* sinon; c'est-à-dire, toute égalité $a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0_E$ entraîne que $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Remarque. (1) En bref, on dit qu'une famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est *liée* ou *libre* si $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement dépendants ou indépendants, respectivement.

(2) Par convention, la famille vide $\emptyset$ est libre.

Exercice. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Vérifier si $\{u_1, u_2\}$ est liée ou libre.

Le résultat suivant dit que c'est facile de déterminer si une petite famille de vecteurs est liée ou libre.

4.1.9. Lemme. Si $u, v \in E$, alors
(1) $\{u\}$ est liée si, et seulement si, $u = 0_E$;
(2) $\{u, v\}$ est liée si et seulement si, un de u, v est un multiple de l'autre.

Exercice. Déterminer lesquelles des familles de vecteurs $\mathbb{R}^2$ suivantes sont libres.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le résultat suivant nous dit que le problème de déterminer si une famille de vecteurs est liée ou libre se ramène au problème de déterminer si un système homogène d'équations linéaires admet des solutions non nulles ou non.

4.1.10. Théorème. Pour tous $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^m$, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
(2) Le système homogène $(u_1, \ldots, u_n)X = 0$ n'a que la solution nulle.
(3) $\mathrm{rg}(u_1 \ldots u_n) = n$.

Exercice. Déterminer laquelle des familles de vecteurs suivantes est liée.

(1) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$

(2) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$

Le résultat suivant donne une caractérisation de l'indépendance linéiare.

4.1.11. Proposition. Si $u_1, \ldots, u_n \in E$, alors les conditions suivantes sont équivalents.
(1) La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
(2) Toute sous-famille de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
(3) Aucun de $u_1, \ldots, u_n$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
(4) Toute combinaison linéaire u de $u_1, \ldots, u_n$ s'écrit d'une façon unique

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n, \text{ avec } \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre, alors
(1) $u_i \neq 0_E$, $i = 1, \ldots, n$;
(2) $u_i \neq u_j$ lorsque $i \neq j$.

Exercice. Vérifier qu'aucune des trois couleurs parmi le rouge, le vert et le bleu n'est obtenue en mélangeant les deux autres.

4.1.12. Définition. Soit E un espace vectoriel réel.
(1) Si E est non nul, une famille ordonnée $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de vecteurs de E s'appelle *base* si
  (i) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre; et
  (ii) tout vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.
(2) Si $E = \{0_E\}$ alors, par convention, la famille vide $\emptyset$ est la seule base de E.

Exercice. Vérifier que $\mathbb{R}^2$ a pour base la famille ordonnée suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.1.13. Proposition. Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ a pour base, appelée *base canonique*, la famille ordonnée suivante:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Démonstration. Comme $(e_1 \cdots e_n) = I_n$ est de rang n, d'après le théorème 4.1.10, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est libre. En outre, tout vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

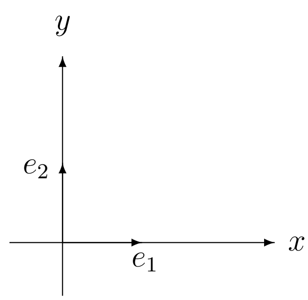
s'écrit comme $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$. Par définition, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Ceci achève la démonstration.

Exemple. (1) La base canonique de ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ est $\{1\}$.

(2) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

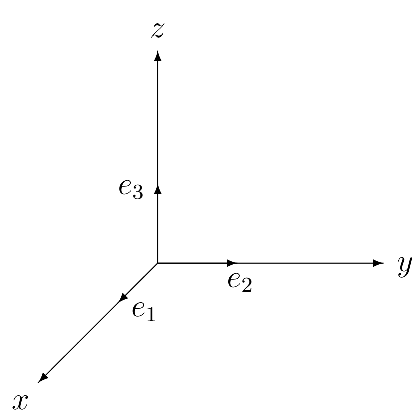
illustrée par le diagramme comme suit:



(3) La base de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ est

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

illustrée par le diagramme comme suit:



4.1.14. Théorème. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs; ce nombre commun s'appelle la *dimension* de E, noté $\dim(E)$.

Remarque. $\dim(E) = 0$ si, et seulement si, $E = \{0_E\}$.

Exemple. Pour tout $n \geq 1$, on a $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. En effet, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ de n vecteurs.

Le résultat suivant nous dit que, dans certains cas, on peut utiliser la dimension pour vérier qu'une famille de vecteurs est libre, et aussi qu'une famille libre est une base.

4.1.15. Théorème. Si $\dim(E) = n$, alors
(1) toute famille libre de n vecteurs de E est une base;
(2) toute famille de plus que n vecteurs de E est liée.

Exercice. Vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Coordonnées

Le but de cette section est d'appliquer la théorie de matrices à l'étude d'espaces vectoriels de dimension finie. Partout dans cette section, on se fixe E un espace vectoriel réel de dimension finie.

4.2.1. Définition. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E. Alors tout $u \in E$ s'écrit d'une façon unique

$$(*) \qquad u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n,$$

où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ s'appellent *coordonnées* de u dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Remarque. Si l'on considère $(u_1, \ldots, u_n)$ comme une matrice-ligne et met les coordonnées en colonne

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

appelée la *colonne des coordonnées* de u dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$, alors l'équation $(*)$ devient

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ceci est illustrée par le diagramme suivant:

$$(u_1, \ldots, u_n) \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} u.$$

Exercice. Soient
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Trouver la colonne des coordonnées de u

(1) dans la base $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$;

(2) dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$;

(3) dans la base $\{e_2, e_1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

L'observation suivante sera pratique.

4.2.2. Lemme. Considérons l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$. Étant donné un vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

ses coordonnées dans la base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sont $\{a_1, \ldots, a_n\}$, appelées *coordonnées canoniques*. Par conséquent, la colonne des coordonnées canoniques de u est simplement u.

Plus généralement, on a la notion suivante.

4.2.3. Définition. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E et $\{v_1, \ldots, v_m\}$ une famille ordonnée de vecteurs de E. Si A_j est la colonne des coordonnées de v_j dans $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $j = 1, \ldots, m$, alors la matrice
$$(A_1 \cdots A_m) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$
s'appelle *matrice des coordonnées* de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ dans $\{u_1, \ldots, u_n\}$, notée $P^{\{v_1,\ldots,v_m\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$.

Remarque. (1) $P^{\{v\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est la colonne de coordonnées de v dans $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

(2) En considérant $(v_1, \ldots, v_m)$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ comme des matrices-ligne, on a

$$(v_1, \ldots, v_m) = (u_1, \ldots, u_n)P^{\{v_1,\ldots,v_m\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}}.$$

Ceci est illustré par le diagramme suivant:

$$(u_1, \cdots, u_n) \xrightarrow{P^{\{v_1,\ldots,v_m\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}}} (v_1, \cdots, v_m).$$

Exercice. Considérer la base de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trouver la famille $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$, dont la matrice des coordonnées dans $\{u_1, u_2\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.2.2.

4.2.4. Lemme. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, alors

$$P_{\{e_1,\ldots,e_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_m\}} = (v_1 \cdots v_m).$$

Exercice. Posons $v_1 = u_1 - u_2; v_2 = u_2 - u_3; v_3 = u_1 - u_3; v_4 = u_3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(1) En sachant que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base, trouver $P_{\{u_1,u_2,u_3\}}^{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}}$.

(2) Considérant la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, trouver $P_{\{e_1,e_2,e_3\}}^{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}}$.

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une famille de vecteurs est une base ou non en utilisant sa matrice des coordonnées dans une base connue.

4.2.5. Théorème. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E, alors $v_1, \ldots, v_n \in E$ forment une base de E si et seulement si $P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}}$ est inversible.

Exercice. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}; \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer laquelle de $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $A = (A_1 \cdots A_n) \in M_n(\mathbb{R})$ partagée en colonnes. D'après le lemme 4.2.4, la matrice des coordonnées de $\{A_1, \ldots, A_n\}$ dans la base canonique est A. En appliquant le théorème 4.2.5, on obtient immédiatement le résultat suivant.

4.2.6. Corollaire. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si A est inversible.

Exercice. Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^2$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix}.$$

On étudiera la matrice des coordonnéees d'une base dans une autre base.

4.2.7. Définition. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ deux bases de E. On définit la *matrice de passage* de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, \ldots, v_n\}$ comme étant

$$P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}},$$

la matrice des coordonnées de la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Remarque. D'après le théorème 4.2.5, $P = P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}}$ est inversible telle que

$$(v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n)P.$$

Ceci est illustré par le diagramme suivant:

$$(u_1, \cdots, u_n) \xrightarrow{\quad P \quad} (v_1, \cdots, v_n).$$

Exercice. Considérons la base de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Donner les matrices de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{u_1, u_2\}$ et à $\{u_2, u_1\}$ respectivement.

(2) Donner la base $\{v_1, v_2\}$ à laquelle la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.2.4.

4.2.8. Lemme. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice de passage de la base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est $(u_1 \cdots u_n)$.

D'après le lemme 4.2.2, il est trivial de trouver les coordonnées canoniques d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Le résultat suivant nous dit comment utiliser la matrice de passage pour trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base non canonique.

4.2.9. Théorème. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\{u_1, \cdots, u_n\}$ à $\{v_1, \cdots, v_n\}$. Si $u \in E$ avec $A = P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{u\}}$, alors

$$P_{\{v_1,\ldots,v_n\}}^{\{u\}} = P^{-1}A.$$

Remarque. Le théorème 4.2.9 est illustrée par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
(u_1, \cdots, u_n) \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "A"'] & (v_1, \cdots, v_n) \arrow[d, dotted, "P^{-1}A"] \\
& u.
\end{tikzcd}$$

Exercice. (1) Vérifier que le jaune, le magenta et le cyant forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer si l'on peut mélanger le jaune J, le magenta M et le cyant C pour obtenir la couleur

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On a vu que c'est trivial de trouver la matrice de passage de la base canonique à une base quelconque. Le résultat donne une méthode pour trouver la matrice de passage entre deux bases quelconques.

4.2.10. Théorème. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\{w_1, \ldots, w_n\}$ des bases de E. Soient P, Q les matrices de passage de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et à $\{w_1, \ldots, w_n\}$, respectivement.

(1) La matrice de passage de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ à $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est P^{-1}.

(2) La matrice de passage de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ à $\{w_1, \ldots, w_n\}$ est $P^{-1}Q$.

Remarque. Le théorème 4.2.10(2) est illustrée par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\{u_1, \ldots, u_n\} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "Q"'] & \{v_1, \ldots, v_n\} \arrow[d, dotted, "P^{-1}Q"] \\
& \{w_1, \ldots, w_n\}
\end{tikzcd}$$

Exercice. Considérons deux bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la matrice de passage de $\{u_1, u_2, u_3\}$ à $\{v_1, v_2, v_3\}$.

On conclut cette section par une application de matrice de passage à l'imagerie. Un *espace de couleurs* est un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel réel qui représentent des couleurs numériques. L'espace de couleurs le plus populaire utilisé en infographie est l'espace RVB. Dans ce modèle, une couleur ayant $\{r; v; b\}$ pour coordonnées RVB est représentée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

En particulier, le rouge R, le vert V et le bleu B sont représentés par

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, l'espace RVB se compose des vecteurs du cube unitaire de $\mathbb{R}^3$.

Remarquons que certaines couleurs visibles ne sont pas comprises dans l'espace RVB. En 1931, la Commission internationale de l'éclairage a introduit l'espace XYZ, en choisissant trois quasi-couleurs X, Y, Z de telle manière que toute couleur visible C admet des coordonnées XYZ non-négatives $\{C_x; C_x; C_z\}$, où C_y représente la luminance de C.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ répéré par RVB, les quasi-couleurs X, Y, Z sont représentées par les vecteurs suivants:

$$X = \begin{pmatrix} 0,418456 \\ -0,091167 \\ 0,000921 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -0,158657 \\ 0,252426 \\ -0,002550 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} -0,082833 \\ 0,015707 \\ 0,178595 \end{pmatrix}.$$

La matrice des coordonées de $\{X, Y, Z\}$ dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0,418456 & -0,158657 & -0,082833 \\ -0,091167 & 0,252426 & 0,015707 \\ 0,000921 & -0,002550 & 0,178595 \end{pmatrix},$$

ce qui est inversible avec

$$M^{-1} \approx \frac{1}{0,17697} \begin{pmatrix} 0,49000 & 0,31000 & 0,20000 \\ 0,17697 & 0,81240 & 0,01063 \\ 0,00000 & 0,01000 & 0,99000 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\{X, Y, Z\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On remarque que la matrice de passage de $\{R, V, B\}$ à $\{X, Y, Z\}$ est M. En appliquant le théorème 4.2.9, on obtient la conversion entre les coordonnées RVB et les coordonnées XYZ d'une couleur dans l'espace RVB comme suit.

4.2.11. Théorème. Toute couleur visible C s'exprime comme

$$C = C_x \cdot X + C_y \cdot Y + C_z \cdot Z,$$

où C_x, C_y, C_z sont des nombres réels non-gégatifs, appelés *coordonnées XYZ* de C. Si C appartient à l'espace RVB dont les coordonnées RVB sont $\{C_r; C_v; C_b\}$, alors

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} C_r \\ C_v \\ C_b \end{pmatrix} = \frac{1}{0,17697} \begin{pmatrix} 0,49000 & 0,31000 & 0,20000 \\ 0,17697 & 0,81240 & 0,01063 \\ 0,00000 & 0,01000 & 0,99000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r \\ C_v \\ C_b \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} C_r \\ C_v \\ C_b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,418456 & -0,158657 & -0,082833 \\ -0,091167 & 0,252426 & 0,015707 \\ 0,000921 & -0,002550 & 0,178595 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}.$$

Exercice. (1) Trouver les coordonnées XYZ du magenta.

(2) Soit C une couleur dont les coordonnées XYZ sont $\{2, 1, 1\}$. Trouver les coordonnées RVB de C.

Solution. (1) Les coordonnées RVB du magenta sont $\{1, 0, 1\}$. D'après le théorème 4.2.10, ses coordonnées XYZ sont données par

$$\frac{1}{0,17697} \begin{pmatrix} 0,49000 & 0,31000 & 0,20000 \\ 0,17697 & 0,81240 & 0,01063 \\ 0,00000 & 0,01000 & 0,99000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,89897 \\ 1,06007 \\ 5,59417 \end{pmatrix}.$$

(2) D'après le théorème 4.2.11, les coordonnées RVB de C sont données par

$$\begin{pmatrix} C_r \\ C_v \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,418456 & -0,158657 & -0,082833 \\ -0,091167 & 0,252426 & 0,015707 \\ 0,000921 & -0,002550 & 0,178595 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,595422 \\ 0,085799 \\ 0,177887 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, la couleur C est constituée de 60% du rouge, 9% du vert, et 18% du bleu.

4.3. Sous-espaces vectoriels

Le but de cette section est d'étudier un type de sous-ensembles d'un espace vectoriel, appelés *sous-espace vectoriels*. Les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$ apparaissent souvent en lien avec une matrice.

Partout dans cette section, on se fixe E un espace vectoriel réel.

4.3.1. Définition. Un sous-ensemble non vide F de E s'appelle *sous-espace vectoriel* si les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) Si $u \in F$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $au \in F$.

(2) Si $u, v \in F$, alors $u + v \in F$.

Exemple. (1) $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels, appelés *sous-espaces vectoriels triviaux*, de E.

(2) L'espace RVB de couleurs n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, il n'est pas stable pour l'addition.

Exercice. Vérifier que le plan $P_{x,y}$ des x, y de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel.

On rassemble des propriétés d'un sous-espace vectoriel dans le résultat suivant.

4.3.2. Lemme. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
(1) $0_E \in F$.
(2) Si $u \in F$, alors $-u \in F$.
(3) Si $u_1, \ldots, u_r \in F$, alors $a_1u_1 + \cdots + a_ru_r \in F$, pour tous $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$.

Exercice. Considérons la droite affine de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1 \right\}.$$

Déterminer si D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ou non.

4.3.3. Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
(1) F est un espace vectoriel réel pour les opérations induites de celles de E.
(2) Si $\dim(E) = n$, alors $\dim(F) \leq n$; et si $F \neq E$, alors $\dim(F) < n$.

Remarque. Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ s'appelle
(1) une *droite vectorielle* si $\dim(F) = 1$;
(2) un *plan vectoriel* si $\dim(F) = 2$.

Exemple. (1) Si F est un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\dim\{0_{\mathbb{R}^2}\} < \dim(F) < \dim(\mathbb{R}^2).$$

D'où, $0 < \dim(F) < 2$, et donc, $\dim(F) = 1$. C'est-à-dire, F est une droite vectorielle.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\dim\{0_{\mathbb{R}^3}\} < \dim(F) < \dim(\mathbb{R}^3).$$

D'où, $0 < \dim(F) < 3$, et donc, donc $\dim(F) = 1$ ou 2. C'est-à-dire, F est une droite vectorielle ou un plan vectoriel.

4.3.4. Proposition. Si $u_1, \ldots, u_r \in E$, alors l'ensemble

$$< u_1, \ldots, u_r > := \{a_1u_1 + \cdots + a_ru_r \mid a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelé *sous-espace vectoriel engendré* par $u_1, \ldots, u_r$.

À l'aide de cette terminologie, on obtien une autre définition d'une base.

Remarque. Des vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in E$ forment une base si et seulement si
(1) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre; et
(2) $E =< u_1, \ldots, u_n >$.

Exercice. Calculer le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

On s'intérèsse à trouver une base d'un sous-espace vectoriel. Le résultat suivant est evident.

4.3.5. Lemme. Si F est un sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_r$, alors $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base de F si et seulement si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est libre.

Exemple. (1) Si $u \in \mathbb{R}^n$ est non nul, alors

$$< u >= \{au \mid a \in \mathbb{R}\}$$

est une droite vectorielle. En effet, comme u est non nul, $\{u\}$ est libre. D'après le lemme 4.3.5, $\{u\}$ est une base de $< u >$. En particulier, $\dim < u >= 1$.

(2) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont non co-linéaires, alors

$$< u, v >= \{au + bv \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est un plan vectoriel. En effet, comme u, v ne se trouvent pas sur la même droite vectorielle, aucun de u, v n'est un multiple de l'autre. D'après le lemme 4.1.9, $\{u, v\}$ est libre. D'après le lemme 4.3.5, $\{u, v\}$ est une base de $< u, v >$. En particulier, $\dim < u, v >= 2$.

On va étudier deux sous-espaces associés à une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

4.3.6. Définition. Soit $A = (A_1 \cdots A_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, où $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^m$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par $A_1, \ldots, A_n$ s'appelle *espace-colonne* de A, noté $\mathcal{C}(A)$.

Remarque. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'espace-colonne d'une matrice.

En vue du du lemme 4.1.6(2), on obtient le résultat suivant.

4.3.7. Proposition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(1) $\mathcal{C}(A) = \{Au \mid u \in \mathbb{R}^n\}$.
(2) Un système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \mathcal{C}(A)$.

Exercice. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} ; \ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer lequel de u, v appartient à $\mathcal{C}(A)$.

On étudiera comment trouver une base de l'espace-colonne d'une matrice. Le résultat suivant est une conséquence des lemmes 4.3.5 et 4.1.9.

4.3.8. Proposition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de colonnes $A_1, \ldots, A_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $A_1, \ldots, A_n$ forment une base de $\mathcal{C}(A)$.
(2) $A_1, \ldots, A_n$ sont linéairement indépendantes.
(3) $\mathrm{rg}(A) = n$.

Exercice. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier si les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$ ou non.

En général, on a le résultat suivant.

4.3.9. Théorème. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de colonnes $A_1, \ldots, A_n$. Si les pivots d'une forme échelonnée de A se trouvent dans les colonnes $j_1, \cdots, j_r$, alors $\{A_{j_1}, \cdots, A_{j_r}\}$ est une base de $\mathcal{C}(A)$. En particulier, $\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice. Trouver une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on revient au problème de la résolution d'un système homogène d'équations linéaires.

4.3.10. Lemme. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors l'ensemble

$$\mathcal{N}(A) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé *noyau* de A.

Remarque. On voit que $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des solutions du système homogène

$$AX = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{N}(A)$ s'appelle aussi *espace-solution* du système homogène $AX = 0$.

Le résultat suivant nous dit comment trouver une base du noyau d'une matrice.

4.3.11. Théorème. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dont A' est une forme échelonnée.

Si le système homogène échelonné $A'X = 0$ n'a aucune inconnue libre, alors $\mathcal{N}(A)$ est nul et a pour base l'ensemble vide.

Si le système échelonné $A'X = 0$ admet s inconnues libres $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$, alors on le résout successivement

(1) en posant $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = \cdots = x_{i_s} = 0$, ce qui donne une solution u_1;

(2) en posant $x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 1, x_{i_3} = \cdots = x_{i_s} = 0$, ce qui donne une solution u_2;

$\vdots$

(s) en posant $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_{s-1}} = 0, x_{i_s} = 1$, ce qui donne une solution u_s.

Alors $\{u_1, \ldots, u_s\}$ est une base de $\mathcal{N}(A)$.

En tout cas, on voit que

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \mathrm{rg}(A),$$

le nombre d'inconnues libres du système homogène échelonné $A'X = 0$.

Exercice. Trouver une base de l'espace-solution du système homogène suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & = & 0 \\
4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & + & 7x_6 & = & 0 \\
8x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & + & 15x_6 & = & 0 \\
6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & + & 10x_6 & = & 0.
\end{array}$$

4.4. Sous-espaces affines

On commence par la notion de coorodnnées homogènes, ce qui est important pour l'infographie. Le point d'arrivée d'un vecteur

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

sera noté $(a_1, \ldots, a_n)$. D'une façon évidente, on additionne et multiplie par un scalaire les points d'arrivée des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ceci nous donne aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $\mathbb{R}^{(n)}$.

4.4.1. Définition. Soit un point $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{(n)}$. On appelle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

un vecteur de *coordonnées homogènes* de p si $x_{n+1} \neq 0$ et

$$\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = p.$$

En particulier,

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

s'appelle le vecteur des *coordonnées homogènes normalisées* de p. Par contre, on appelle

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

le *vecteur des coordonnées canoniques* de p.

Le résultat suivant est évident.

4.4.2. Lemme. Soit un point $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{(n)}$.

(1) Si $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un vecteur de coordonnées homogènes de p, alors $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ est aussi un vecteur de coordonnées homogènes de p si et seulement si $w = av$ avec $a \neq 0$.

(2) L'ensemble des vecteurs de coordonnées homogènes de p est

$$\left\{ \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \\ a \end{pmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R}. \right\}$$

Exercice. Soient

$$u = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -21 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(1) Vérifier que u, v sont des vecteurs de coordonnées homogènes du même point.

(2) Écrire $v = au$ avec a non nul.

On définira la notion de dépendance affine de points en termes de la dépendance linéaire de leurs vecteurs de coordonnées homogènes normalisées.

4.4.3. Définition. Des points $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}^{(n)}$ sont dits

(1) *affinement dépendants*, ou bien, $\{p_1, \ldots, p_r\}$ est *affinement liée*, si $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_r$ sont linéairement dépendants dans $\mathbb{R}^{n+1}$;

(2) *affinement indépendants*, ou bien $\{p_1, \ldots, p_r\}$ est *affinement libre*, si $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_r$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque. (1) Toute famille d'un seul point est affinement libre.

(2) Une famille affinement libre de points de $\mathbb{R}^{(n)}$ contient au plus $n+1$ points.

Exercice. Soient

$$p_1 = (1, 3, 7), p_2 = (2, 7, 6), p_3 = (0, 4, 7), p_4 = (1, 8, 6) \in \mathbb{R}^{(3)}.$$

Vérifier si $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ est affinement liée ou affinement libre.

4.4.4. Proposition. Soit $\{p_1, \ldots, p_r\}$ une famille affinement libre de points de $\mathbb{R}^{(n)}$. Pour tous $c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{R}$, on a

$$p = c_1 p_1 + \cdots + c_r p_r; c_1 + \cdots + c_r = 1$$

si et seulement si

$$\hat{p} = c_1 \hat{p}_1 + \cdots + c_r \hat{p}_r.$$

Dans ce cas, p s'appelle *barycentre* de $p_1, \ldots, p_r$; et $c_1, \ldots, c_r$ s'appellent *coordonnées barycentriques* de p dans $\{p_1, \ldots, p_r\}$.

Remarque. On voit que p est un barycentre de $p_1, \ldots, p_r$ si et seulement si $\hat{p}$ est une combinaison linéaire de $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_r$.

Exercice. Exprimer, si possible, p comme barycentre de p_1, p_2 et p_3, où

$$p_1 = (3, 1, 1),\ p_2 = (1, 2, 2),\ p_3 = (1, 7, 1),\ p = (4, 3, 0) \in \mathbb{R}^{(3)}.$$

4.4.5. Proposition. Si $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{(n)}$, alors $\{p_1, p_2\}$ est affinement libre si et seulement si $p_1 \neq p_2$; et dans ce cas, l'ensemble des barycentres de p_1, p_2 est donné par

$$D(p_1, p_2) = \{(1-t)p_1 + tp_2 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

ce qui est la droite affine passant par p_1, p_2; et

$$\delta(p_1, p_2) = \{(1-t)p_1 + tp_2 \mid 0 \le t \le 1\}$$

est le segment d'éxtrémités p_1, p_2.

Exercice. Décrire la droite affine D de $\mathbb{R}^{(2)}$ passant par deux points $(2, 1)$ et $(4, 5)$.

Solution. Soit un point $p = (x, y) \in \mathbb{R}^{(2)}$.

(1) On a $p \in D$ si et seulement si p est un barycentre de p_1, p_2 si et seulement si $\hat{p}$ est une combinaison linéaire de $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ si et seulement si $\operatorname{rg}(\hat{p}_1\, \hat{p}_2) = \operatorname{rg}(\hat{p}_1\, \hat{p}_2 \mid \hat{p})$. Maintenant,

$$(\hat{p}_1\, \hat{p}_2 \mid \hat{p}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 1 & 5 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & x-2 \\ 0 & 0 & 2x-y-3 \end{array}\right).$$

Par conséquent, $(x, y) \in D$ si et seulement si $2x - y = 3$, c'est-à-dire,

$$2x - y = 3,$$

ce qui s'appelle *équation cartésienne* de D.

(2) De l'autre côté, $p \in D$ si, et seulement si,

$$(x, y) = (1-t)(2, 1) + t(4, 5) = (; t \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & 2 & + & 2t \\ y & = & 1 & + & 4t; \quad t \in \mathbb{R}, \end{array}$$

ce qui s'appellent *équations paramétriques* de D.

4.4.6. Proposition. Si $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^{(n)}$, alors $\{p_1, p_2, p_3\}$ est affinement libre si et seulement si p_1, p_2, p_3 ne se trouvent pas sur une même droite affine; et dans ce cas, l'ensemble des barycentres de p_1, p_2, p_3 est

$$P(p_1, p_2, p_3) = \{(1-s-t)p_1 + sp_2 + tp_3 \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

ce qui est le plan affine passant par p_1, p_2, p_3. En outre,

$$\Delta(p_1, p_2, p_3) = \{(1-s-t)p_1 + sp_2 + tp_3 \mid 0 \le s, t, s+t \le 1\}$$

est le triangle de sommets p_1, p_2, p_3.

Exercice. Soient $p_1 = (1, 3, 7), p_2 = (2, 7, 6), p_3 = (0, 4, 7) \in \mathbb{R}^{(3)}$.

(1) Vérifier que $\{p_1, p_2, p_3\}$ est affinement libre.

(2) Décrire le plan P passant par p_1, p_2, p_3.

Solution. (1) On échelonne

$$(\hat{p}_1\,\hat{p}_2\,\hat{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 7 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où, $\mathrm{rg}(\hat{p}_1\,\hat{p}_2\,\hat{p}_3) = 3$. Donc $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. Par conséquent, $\{p_1, p_2, p_3\}$ est affinement libre dans $\mathbb{R}^{(3)}$.

(2) Un point $p = (x, y, z)$ appartient à P si et seulement si,

$$(x, y, z) = (1 - s - t)p_1 + sp_2 + tp_3 = (1 + s - t, 3 + 4s + t, 7 - s);\ \ s, t \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 + s - t \\ y & = & 3 + 4s + t \\ z & = & 7 - s; \qquad\qquad s, t \in \mathbb{R}, \end{array}$$

ce qui s'appellent *équations paramétriques* de P.

On conclut cette section par une application de coordonnées barycentriques en imagerie, qui donne une méthode pour colorer un triangle d'une façon lisse.

4.4.7. Principe de colorage. Soit Δ un triangle coloré de sommets p_1, p_2, p_3 auxquels les couleurs sont C_1, C_2, C_3 respectivement. Si $p \in \Delta$ dont les coordonnées barycentriques dans $\{p_1, p_2, p_3\}$ sont a_1, a_2, a_3 respectivement, alors la couleur C à p sera deonnée par

$$C = a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3.$$

Exercice. Soit Δ un triangle coloré de sommets

$$p_1 = (3, 1, 5), p_2 = (4, 3, 4), p_3 = (1, 5, 1),$$

auxquels les couleurs sont le magenta $\{1; 0; 1\}$, le magenta claire $\{1; 0, 4; 1\}$, et le pourpre $\{0, 6; 0; 1\}$ respectivement.

(1) Vérifier que $p = (3, 3, \frac{7}{2}) \in \Delta$.

(2) Donner la couleur C au point p.

4.5. Exercices

1. Montrer qu'un espace vectoriel réel non nul contient une infinité de vecteurs.

2. Soit D une couleur obtenue en mélangeant 20% du blanc, 25% du magenta, 30% du gris et 10% du pourpre.

   (1) Exprimer la colonne des coordonnées RVB de la couleur D comme combinaison linéaire des colonnes des coordonnées du blanc, du magenta, du gris et du pourpre.

   (2) Donner les coordonnées RVB de la couler D.

3. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   À l'aide du lemme 4.1.6, déterminer lequel de u et v est une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3; et donner une expression explicite dans le cas échéant.

4. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Donner les valeurs réelles de a et b pour que u soit une combinaison linéaire de v_1 et v_2.

5. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 5 \\ 31 \\ 24 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   (1) Exprimer u, à l'aide du lemme 4.1.6, comme une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.

   (2) Déterminer, à l'aide du théorème 4.1.7, si v est une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 ou non.

   (3) Vérifier, à l'aide du théorème 4.1.10, que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

   (4) Vérifier, à l'aide de la partie (1) et la définition 4.1.11(3), que $\{u_1, u_2, u_3, u\}$ est liée.

6. (1) Montrer qu'aucune des couleurs blanc, cyan et magenta ne peut être obtenue en mélangeant deux autres. *Indice*: Vérifier que leurs colonnes des coordonnées RVB sont linéairement indépendantes.

(2) Déterminer si l'on peut obtenir le pourpre en mélangeant le blanc, le cyan et le magenta.

(3) Déterminer si l'on peut obtenir le blanc en mélangeant le jaune, le magenta et le cyan; et si oui, comment?

7. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \\ a \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée ou libre.

(2) Donner la valeur réelle de a pour que u soit une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3; et dans ce cas, exprimer u comme une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

8. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants ou indépendants:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \\ 23 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

9. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier, à l'aide du théorème 4.1.10, que $\{u_1, u_2\}$ est libre.

(2) Montrer que $\{u_1, u_2\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ en donnant, à l'aide du théorème 4.1.7(3), un vecteur qui n'est pas une combinaison linéaire de u_1, u_2.

10. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier, d'après la définition 4.1.12 que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. *Indice*: Appliquer les théorèmes 4.1.9(3) et 4.1.7(3).

(2) Donner la colonne des coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Appliquer le lemme 4.1.6 pour exprimer u comme une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

11. Considérer les couleurs numériques suivantes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que les vecteurs M, B, C forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Laquelle de A, B peut être obtenue en mélangeant M, B et C? Dans le cas échéant, donner l'intensité de chacune de ces trois couleurs.

12. Soit E un espace vectoriel réel. Si $u_1, u_2, u_3 \in E$ sont linéairmeent indépendants, montrer que la famille $\{v_1 = 3u_1,\ v_2 = 2u_1 - u_2, v_3 = u_1 + u_3\}$ est libre.

13. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $v_1 = a_1u_1; v_2 = a_2u_2; v_3 = a_3u_3$ avec $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Donner la matrice des coordonnées de $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(2) Donner, à l'aide du théorème 4.2.5, la condition pour que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

14. (**MATLAB**) Considérer la matrice réelle suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 40 & 66 & 35 & -6 \end{pmatrix}.$$

À l'aide du corollaire 4.2.6, donner les valeurs réelles de x pour que les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Indice: Calculer $\det(A)$, ce qui est un polynôme en x. Trouver, à l'aide du MATLAB, les racines réelles de ce polynôme.

15. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donner, à l'aide du corollaire 4.2.6, la valeur réelle de a pour que $\{u_1, u_2, u_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

16. Dans chacun des cas suivants déterminer, avec justification, si les vecteurs donnés forment une base de $\mathbb{R}^3$ ou non.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$

(3) $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

17. Dans chacun des cas suivants déterminer, à l'aide du théorème 4.2.5, si la famille de vecteurs est une base de $\mathbb{R}^4$ ou non.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$

18. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Trouver la matrice des coordonnées de $\{u, v\}$ dans cette base.

Indice: Trouver, à l'aide de le théorème 4.2.9, la colonne des coordonnées de chacun des u, v dans $\{u_1, u_2\}$.

19. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(1) Trouver la colonne des coordonnées de $u_1 - u_3$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(2) Trouver la matrice des coordonnées de $\{u_1, u_2\}$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

20. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice de passage de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base donnée:

(1) $\{u_1, u_2, u_3\}$; (2) $\{u_3, u_1, u_2\}$;

(3) $\{u_2, u_3, u_1\}$; (4) $\{u_3, u_2, u_1\}$.

21. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice des coordonnées de $\{u_1, u_2, u_3\}$ dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(2) Vérifier, à l'aide du théorème 4.2.5, que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Donner le vecteur w dont les coordonnées dans $\{u_1, u_2, u_3\}$ sont $\{2, 3, -2\}$.

(4) Trouver, à l'aide de le théorème 4.2.9, la colonne des coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

22. (**MATLAB**)

(1) Donner les coordonnées XYZ du pourpre.

(2) Donner les coordonnées RVB d'une couleur dont les coordonnées XYZ sont $\{1, 2, 1\}$.

23. Dans chacun de cas suivants, déterminer si le sous-ensemble donné de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ou non.

(1) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid b = 2a \right\}$; (2) $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid b = a^2 \right\}$.

24. Donner des équations cartésiennes de la droite contenant le vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

25. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que P est un plan vectoriel.

(2) Trouver une équation cartésienne de P.

26. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$, qui n'appartient pas à F.

27. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de F et donner $\dim(F)$. *Indice*: Appliquer le théorème 4.3.7 à la matrice formée de ces vecteurs.

28. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

et considérer ses vecteurs suivants:

$$v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3,\ v_2 = u_1 - u_2 + u_3,\ v_3 = u_1 - u_3; u = 3u_1 - u_2 + 4u_3.$$

(1) Vérifier, à l'aide du lemme 4.3.5, que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de F.

(2) Donner la matrice des coordonnées de $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans $\{u_1, u_2, u_3\}$, et vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est aussi une base de F.

29. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants, montrer que le sous-espace vectoriel engendré par u, v admet un vecteur qui a des termes strictement positifs ainsi que des termes strictement négatifs.

30. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Donner un vecteur de F ayant des termes strictement positifs ainsi que des termes strictement négatifs.

31. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer si u appartient à F ou non.

(2) Donner la valeur réelle de a pour que v appartienne à F.

32. Dans chacun des cas suivants, calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs donnés:

(1) $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix};$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

33. Considérer la matrice et les vecteurs suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ u = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix};\ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une base de $\mathcal{C}(A)$.

(2) Déterminer le quel de u, v appartient à $\mathcal{C}(A)$.

Indice: Pour les deux parties, il suffit d'échelonner $(A \mid u \mid v)$.

34. Trouver une base de $\mathcal{N}(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 9 & 6 \\ -1 & 7 & 4 & 10 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

35. Trouver une base de l'espace-solution de chacun des systèmes homogènes suivants:

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0. \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 9x_2 & + & 6x_3 & - & 16x_4 & + & 2x_5 & = & 0. \end{array}$$

36. Donner une base de la droite vectoriel ℓ définie par les équations cartésiennes:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0. \end{array}$$

37. Donner une base du plan vectoriel P défini par l'équation cartésienne:

$$2x - y + 5z = 0.$$

38. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs donnés sont des coordonnées homgènes d'un même point de $\mathbb{R}^{(3)}$; et si oui, donner ce point.

(1) $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

39. Considérer les points de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$p_1 = (1, 1, 0, 1), p_2 = (2, 3, 4, 2), p_3 = (1, 2, 4, 1); p = (1, 1, 5, 1); q = (0, -2, -8, 0).$$

(1) Vérifier que p_1, p_2, p_3 sont linéairement dépendants.

(2) Vérifier que p_1, p_2, p_3 sont affinement indépendants.

(3) Le quel de p, q est un barycentre de p_1, p_2, p_3? et dans le cas échéant, donner les coordonnées barycentriques de ce point dans $\{p_1, p_2, p_3\}$.

40. Considérer les points $p_1 = (1, 1),\ p_2 = (2, 1); p = (-1, 1)$ de $\mathbb{R}^{(2)}$.

(1) Donner les équations paramétriuqes de la droite affine D passant par p_1, p_2.

(2) Vérifier que p appartient à D, et donner ses coordonnées barycentriques dans $\{p_1, p_2\}$.

(3) Déterminer si p appartient au segment d'extrémités p_1 et p_2.

41. Considérons les points de $\mathbb{R}^{(3)}$ suivants:

$$p_1 = (3, -1, 2),\ p_2 = (-1, 2, 5),\ p_3 = (2, 1, 7);\ p = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 4\right).$$

(1) Vérifier que p_1, p_2, p_3 sont affinement indépendants.

(2) Trouver les équations paramétriques du plan affine P passant par p_1, p_2, p_3.

(3) Vérifier que le point p appartient au triangle de sommets p_1, p_2, p_3; et donner ses coordonnées barycentriques.

(4) Soit Δ un triangle coloré de sommets p_1, p_2, p_3, auxquels les couleurs sont le cyan, le jaune et le blanc respectivement. Donner la couleur au point p.

Chapitre V: Applications linéaires

On a étudié des propriétés d'espaces vectoriels. Dans la plupart de cas, il est utile de relier un espace vectoriel réel à un autre par une application linéaire enter eux. Les applications linéaires jouent un rôle important dans beaucoup de branches de mathématiques ainsi que dans les sciences appliquées comme infographie.

5.1. Applications générales

Le but de section est d'étudier les applications entre deux ensembles généraux.

5.1.1. Définition. Soit X, Y deux ensembles. Une *application* T de X dans Y est une règle qui associe à chaque élément $x \in X$ un élément unique $T(x) \in Y$, notée

$$T : X \to Y : x \mapsto T(x).$$

On appelle X le *domaine*; et Y, le *codomaine*, de T. En outre, si $y = T(x)$, on appelle alors y l'*image* de x par T; et x, un *préimage* de y.

Exemple. (1) En considérant les vecteurs de coordonnées homogènes normalisés des points de $\mathbb{R}^{(2)}$, on obtient l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^{(2)} \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Considdérant

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0 \right\},$$

on obtient une application comme suit:

$$T : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{(2)} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right).$$

(3) Par contre,

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{(2)} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right)$$

n'est pas une application.

(4) Pour tout ensemble X, on a l'application identité

$$\mathbb{1}_X : X \to X : x \mapsto x.$$

5.1.2. Définition. Soit $T : X \to Y$ une application.
(1) Pour $Z \subseteq X$, l'*image* de Z par T est le sous-ensemble de Y suivant:

$$T(Z) = \{T(z) \mid z \in Z\}.$$

(2) En particulier, $T(X)$ s'appelle *image* de T et noté $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice. Considérons l'application suivante:

$$T : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{(2)} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Calculer $T(D)$, où

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solution. Pour tout $u \in D$, on voit que $T(u) = (\frac{a}{a}, \frac{a}{a}) = (1, 1)$. Ainsi $T(D) = \{(1, 1)\}$.

5.1.3. Définition. Une application $T : X \to Y$ est dite
(1) *surjective* si tout $y \in Y$ admet au moins un préimage $x \in X$, c'est-à-dire, $\mathrm{Im}(T) = Y$;
(2) *injective* si tout $y \in Y$ admet au plus un préimage $x \in X$;
(3) *bijective* si tout $y \in Y$ ademt exactement un préimage $x \in X$, c'est-à-dire, T est surjective et injective.

Exercice. Vérifier que l'application suivante est bijective:

$$T : \mathbb{R}^{(2)} \to \mathbb{R}^{(2)} : (x, y) \mapsto (2x, 3y).$$

5.1.4. Définition. Soient deux applications $T : X \to Y$ et $S : Y \to Z$. On définit l'*application composée* de T et S comme suit:

$$S \circ T : X \to Z : u \mapsto S(T(u)).$$

Remarque. Pour toute application $T : X \to Y$, on a

$$T \circ \mathbb{1}_X = T \text{ et } \mathbb{1}_Y \circ T = T.$$

Exercice. Calculer l'application composée des applications suivantes:

$$S : \mathbb{R}^{(2)} \to \mathbb{R}^{(3)} : (x, y) \mapsto (2x, 3y, 1); \quad T : \mathbb{R}^{(3)} \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x + y - z.$$

5.1.5. Définition. Soit $T : X \to Y$ une application bijective. Alors tout $y \in Y$ a un seul préimage $x \in X$, noté $x = T^{-1}(y)$. On définit *inverse* de T comme étant l'application

$$T^{-1} : Y \to X : y \mapsto T^{-1}(y).$$

Remarque. Si $T : X \to Y$ est bijective, alors $T^{-1} \circ T = \mathbb{1}_X$ et $T \circ T^{-1} = \mathbb{1}_Y$.

Exercice. Donner l'inverse de l'application bijective suivante

$$T : \mathbb{R}^{(2)} \to \mathbb{R}^{(2)} : (x, y) \mapsto (2x, 3y).$$

5.2. Applications linéaires

Dès maintenant, on s'intèsse à des applications entre deux espaces vectoriels réels, qui sont compatibles avec les opérations vectorielles. Partout dans cette section, on fixe E, F deux espaces vectoriels réels.

5.2.1. Définition. Une application $T : E \to F$ est dite *linéaire* si, pour tous $u, v \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes sont vérifiées:
(1) $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
(2) $T(au) = a\,T(u)$.

Exemple. (1) L'application nulle suivante est linéaire:

$$\mathbf{0} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) L'application identié suivante est linéaire:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

5.2.2. Lemme. Soit $T : E \to F$ une application linéaire.
(1) $T(0_E) = 0_F$.

(2) Si $u_1, \ldots, u_r \in E$ et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, alors

$$T(a_1u_1 + \cdots + a_ru_r) = a_1\, T(u_1) + \cdots + a_r\, T(u_r),$$

Exemple. La translation suivante n'est pas linéaire:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est un critère de la linéarité d'une application entre deux espaces vectoriels canoniques.

5.2.3. Théorème. Une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire si, et seulement si, T est définie par une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, T est de la forme

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : u \mapsto Au.$$

Dans ce cas, $A = (T(e_1) \cdots T(e_n))$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Trouver sa formule en coordonnées canoniques.

Exercice. Considérer l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 2y - z \\ 3x + 4y + 2z \\ -x + z \end{pmatrix}.$$

Vérifier que T est linéaire et trouver la matrice qui définit T.

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'application composée de deux applications linéaires.

5.2.4. Proposition. Soient deux applications linéaires

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : u \mapsto Au \;\text{ et }\; S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p : v \mapsto Bv,$$

où $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$. Alors $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire définie par BA. C'est-à-dire,

$$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p : u \mapsto (BA)u.$$

Exercice. Trouver la matrice qui définit l'application composée des applications linéaires

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

et

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dt comment déterminer si une application linéaire est injective ou non.

5.2.5. Proposition. Soit $T : E \to F$ une application linéaire.
(1) $\mathcal{N}(T) = \{u \in E \mid T(u) = 0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé *noyau* de T.
(2) T est injective si et seulement si $\mathcal{N}(T) = \{0_E\}$.

Exemple. Considérer la projection du plan sur l'axe-x suivante:

$$p_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que p_x est linéaire et trouver son noyau.

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'image et le noyau d'une application linéaire à partir de sa matrice.

5.2.6. Théorème. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire définie par une matrice A, alors $\text{Im}(T) = \mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A)$.

Exercice. Soit une application linéaire:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y - z \\ 3x + 6y + 2z \\ -x - 2y + 4z \end{pmatrix}.$$

Trouver une base pour chacun de $\text{Im}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 5.2.6 et de la proposition 5.2.5(2), qui nous donne un critère pour une application linéaire soit injective et soit surjective.

5.2.7. Corollaire. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire définie par $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors
(1) T est injective si et seulement si $\text{rg}(A) = n$; et dans ce cas, $n \leq m$.
(2) T est surjective si et seulement si $\text{rg}(A) = m$; et dans ce cas, $n \geq m$.

Exercice. Déterminer si l'application linéaire suivante est injective ou surjective.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix}.$$

Solution. On voit aisément que T est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{rg}(A) = 2$, d'après le corollaire 5.2.8, T est injective, mais non surjective.

Le résultat suivant donne des propiétés importantes d'applications linéaires injectives, qui sera utile en infographie.

5.2.8. Proposition. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire injective, alors T envoie
(1) un segment d'extrémités p_1 et p_2 au segment d'extrémités $T(p_1)$ et $T(p_2)$;
(2) un triangle de sommets p_1, p_2 et p_3 au triangle de sommets $T(p_1)$, $T(p_2)$ et $T(p_3)$.

Exercice. Soit $\mathit{\Delta}$ le triangle de sommets $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (1,0)$ et $p_3 = (0,1)$. Trouver l'image de Δ par l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ y \end{pmatrix}.$$

5.3. Transformations linéaires

Le but de cette section est d'étudier les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même. Partout dans cette section, on fixe E un espace vectoriel réel.

5.3.1. Définition. (1) Une application linéaire $T : E \to E$ s'appelle une *transformation linéaire* de E.
(2) Une transformation linéaire bijective de E s'appelle un *automorphisme*.

Exemple. (1) La projection suivante est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$.

$$p_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Considérons l'application nulle $\mathbf{0} : E \to E : u \mapsto 0_E$. Il s'agit d'une transformation linéaire de E.

(3) Considérons l'application identité $\mathbb{1} : E \to E : u \mapsto u$. Il s'agit d'un automorphisme de E.

Comme d'habitude, la théorie des matrices est très utile pour étudier les transformations linéaires.

5.3.2. Définition. Soit T une transformation linéaire E. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E, alors $T(u_1), \ldots, T(u_n) \in E$. On définit *matrice* de T dans $\{u_1, \ldots, u_n\}$ comme étant

$$P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{T(u_1),\ldots,T(u_n)\}} := [T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}.$$

Remarque. Par définition de matrice de coordonnées, on a

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (u_1, \cdots, u_n)\,[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}.$$

Ceci est illustré par

$$(u_1, \cdots, u_n) \xrightarrow{[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}} (T(u_1), \cdots, T(u_n)).$$

Exercice. Considérons

$$p_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner sa matrice dans la base suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.3.3. Lemme. Soit une transformation linéaire

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto Au.$$

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$[T]_{\{e_1,\ldots,e_n\}} = A.$$

Remarque. Le lemme 5.3.3 dit que toute transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ est définie par sa matrice dans la base canonique.

Exercice. Donner la matrice dans la base canonique de la projection suivante:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice d'une transformation linéaire change si l'on change la base. Ce changement est décrit dans le résultat suivant.

5.3.4. Théorème. Soit T une transformation linéaire de E. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont deux bases de E, alors

$$[T]_{\{v_1,\ldots,v_n\}} = P^{-1}[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}P,$$

où P est la matrice de passage de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Remarque. Ceci est illustré par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
(u_1, \ldots, u_n) \arrow[r, "{[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}}"] \arrow[d, "P"'] & (T(u_1), \ldots, T(u_n)) \arrow[d, "P"] \\
(v_1, \ldots, v_n) \arrow[r, "{[T]_{\{v_1,\ldots,v_n\}}}"] & (T(v_1), \ldots, T(v_n)).
\end{tikzcd}$$

Exercice. Considérons la base de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Trouver la matrice de la transformation linéaire T dans $\{u_1, u_2\}$, où

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}.$$

(2) Soit S une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $S(u_1) = u_1$ et $S(u_2) = -u_2$. Trouver sa formule en coordonnées canoniques.

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 5.2.4.

5.3.5. Proposition. Soient T et S des transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$. Alors $S \circ T$ est aussi transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$. En outre, pour toute base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$[S \circ T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = [S]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}\,[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}.$$

Exercice. Soit T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}.$$

Soit S une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $S(u_1) = u_1$ et $S(u_2) = -u_2$, où

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trouver la formule de $S \circ T$ en coordonnées canoniques.

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une transformation linéaire est un automorphisme ou non; et si oui, comment trouver son inverse.

5.3.6. Théorème. Soit T une transformation linéaire de E. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.
(1) T est un automorphisme.
(2) $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est inversible.
(3) $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ est aussi une base de E.
Dans ce cas, $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est la matrice de passage de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ et T^{-1} est un automorphisme avec

$$[T^{-1}]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = \left([T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}\right)^{-1}.$$

Exercice. Considérons l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que T est un automorphisme et donner T^{-1}.
(2) Trouver la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{T(u_1), T(u_2)\}$, où

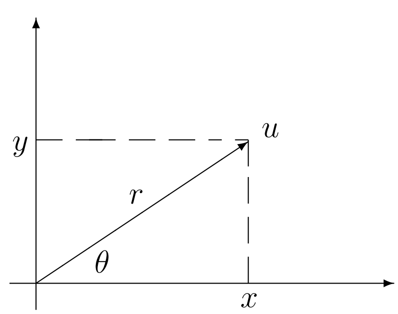
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5.4. Rotations de $\mathbb{R}^2$

Cette section a pour but d'étudier un type spécial d'automorphismes du plan, c'est-à-dire, les rotations en 2D. On commence par un petit rappel de la trigonométrie. Étant donné un vecteur non nul

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

La *longueur* de u est $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, et un *argument* θ de u est un angle de l'axe des abscisses positif à u. Dans ce cas, u est représenté par le vecteur du plan suivant:



Maintenant, on définit

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ceci nous donne

$$u = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix},$$

appelé *forme géométrique* de u. En particulier, on voit aisément que le cercle unitaire se compose des vecteurs suivants:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Le tableau suivant donne les valeurs de sinus et de cosinus de certains angles spéciaux.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5.4.1. Proposition. Si θ, ϕ sont des angles, alors
(1) $\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta$;
(2) $\sin(2\pi+\theta) = \sin\theta$;
(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;
(4) $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$;
(5) $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$.

Exemple. (1) D'après la proposition 5.4.1(4) et (5), on a

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(2) Considérons la matrice suivante:

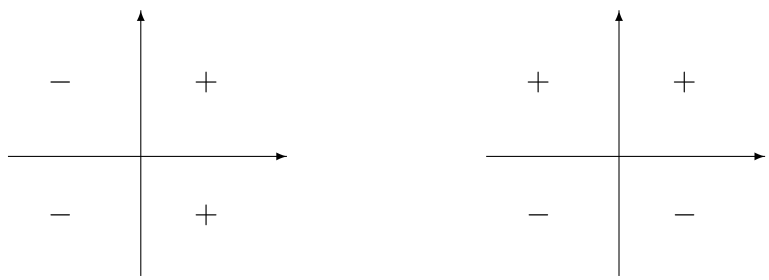
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En vue de la proposition 5.4.1, on vérifie que A_θ est inversible avec

$$A_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = A_\theta^T.$$

Le signe de $\cos\theta$ et celui de $\sin\theta$ selon le quadrant où θ se trouve peuvent être décrits comme suit:

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\qquad\qquad$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$



En appliquant la proposition 5.4.1(4) et (5), on obtient le résultat suivant qui nous permet de trouver le sinus et le cosinus des angles spéciaux dans les autres quadrants.

5.4.2. Proposition. Si θ est un angle, alors

(1) $\begin{pmatrix} \cos(\pi-\theta) \\ \sin(\pi-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} \cos(\pi+\theta) \\ \sin(\pi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$.

Exercice. Trouver un argument du vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on définira les rotations du plan.

5.4.3. Définition. Soit θ un angle fixe. L'application

$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

s'appelle *rotation* du plan d'un angle θ.

Exemple. Comme

$$e_1 = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

D'apprès la définition, on a

$$\rho_\theta(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \rho_\theta(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le résultat nous donne la formule en coordonnées canoniques d'une rotation.

5.4.4. Théorème. La rotation ρ_θ du plan d'un angle θ est un automorphisme de la forme

$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est de la forme suivante:

$$\rho_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soit Σ un triangle du plan de sommet $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (1,0)$ et $p_2 = (1,1)$. Donner l'image de Σ par la rotation d'un angle $\frac{2\pi}{3}$.

5.5. Calibration de caméra

Dans le traitement d'image, on utilise la *calibration de caméra*, ou bien la *projection perspective*, pour modéliser le processus de formation des images. Cette application est non linéaire mais représentable par la multiplication par une matrice en coordoonées homogènes. Dans ce modèle, l'espace $\mathbb{R}^{(3)}$ sera repéré par un *repère caméra* tel que défini ci-dessous:

(1) l'origine est le centre optique de la caméra;
(2) l'axe des z pointe vers les objets;
(3) l'axe des y pointe vers le haut;
(4) l'axe des x est parallèle à la base de la caméra et pointe vers la gauche (en face des objets).

Dans la prise d'une photo, un point (x,y,z) de $\mathbb{R}^{(3)}$ avec $z > 0$ est projeté sur le plan image défini par $z = -d$, où d est la distance focale (c'est-à-dire, la distance entre le point optique et le plan image) de la caméra. On note

$$\mathscr{Z}_d = \{(x,y,d) \in \mathbb{R}^{(3)} \mid x,y \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathscr{Z}_{\neq 0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{(3)} \mid z \neq 0\}.$$

5.5.1. Définition. La *projection perspective* de centre $\mathbf{0} = (0,0,0)$ sur un plan affine $\mathscr{Z}_d$, avec $d \neq 0$, est l'application définie par

$$\mathscr{P}_d : \mathscr{Z}_{\neq 0} \to \mathscr{Z}_d : p \mapsto p^*,$$

où p^* est le point d'intersection de $\mathscr{Z}_d$ et la droite vectorielle passant par p et $\mathbf{0}$.

Le résultat suivant nous dit comment calculer la projective perspective en utilisant les coordonnées homogènes.

5.5.2. Théorème. Soit $\mathscr{P}_d$ la projection perspective de centre $\mathbf{0}$ sur $\mathscr{Z}_d$, où $d \neq 0$. Pour tout $p \in \mathscr{Z}_{\neq 0}$, son image $\mathscr{P}_d(p)$ a pour coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \hat{p}\,,$$

où la matrice s'appelle *matrice en coordonnées homogènes* de $\mathscr{P}_d$.

Exercice. Donner la matrice en coordonnées homogènes de la projection perspective $\mathscr{P}_{-1}$ et calculer l'image du point $p = (1, 2, 3)$ par cette projection.

5.6. Exercices

1. Considérer l'application du déterminant

$$\det : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \mapsto \det(A).$$

   (1) Déterminer, avec justification, si cette application est injective ou non.

   (2) Déterminer, avec justification, si cette application est surjective ou non.

   (3) Déterminer, avec justification, si cette application est bijective ou non.

2. Considérer l'application suivante

$$T : \mathbb{R}^{(2)} \to \mathbb{R}^{(2)} : (x, y) \mapsto (x - 3, y + 3).$$

   (1) Vérifier que T est bijective et trouve son inverse T^{-1}.

   (2) Trouver l'image par T du triangle Δ de sommets

$$p_1 = (-3, 3), p_2 = (-2, 3), p_3 = (-3, 4).$$

3. Considérer l'application suivante:

$$T : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : A \mapsto A^T + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (1) Vérifier que T est une application bijective.

   (2) Donner l'inverse T^{-1}.

4. Considérer l'application suivante

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}.$$

   (1) Calculer $T(e_1)$ et $T(e_2)$, avec $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   (2) Trouver un vecteur spéficique u de $\mathbb{R}^2$ tel que $T(u) \neq Au$, où A est la matrice formée par $T(e_1)$ et $T(e_2)$.

   (3) Déterminer, à l'aide du théorème 5.3.2, si T est linéaire ou non.

5. Dans chacun des cas suivants, vérifier que l'application T est non linéaire.

   (1) $$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 7 \\ y - 5 \end{pmatrix}.$$

   (2) $$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

6. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice qui définit l'application linéaire T.

   (1) $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x \\ -5y \end{pmatrix}.$$

   (2) $$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x \\ 9y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (3) $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x - 5y + z \end{pmatrix}.$$

7. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Si $T(u_1) = v_1$ et $T(u_2) = v_2$, calculer $T(u)$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Indice: D'abord, à l'aide du lemme 4.1.6, exprimer $u = a_1u_1 + a_2u_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; et ensuite, utiliser la linéairité de T.

8. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x \\ 7y \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit T.

(2) Donner l'image par T du disque $\mathcal{S}^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

9. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner la matrice de passage de $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(3) À l'aide de la partie (2), trouver l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. Considérons l'application linéaire

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$S(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, S(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit l'application composée $S \circ T$.

(2) Donner la formule de $S \circ T$ en coordonnées canoniques.

11. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit T.

(2) Donner une base de $\mathrm{Im}(T)$.

(3) Donner une base de $\mathcal{N}(T)$.

12. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(1) Trouver, à l'aide du théorème 5.3.2, la matrice qui définit T.

(2) Donner la dimension de $\mathrm{Im}(T)$ et déterminer si T est surjective ou non.

(3) Donner la dimension de $\mathcal{N}(T)$ et déterminer si T est injective ou non.

13. Dans chacun des cas suivants, trouver une base pour chacun de $\mathcal{N}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

(1) $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y + 6z \\ -3x - 6y - 9z \end{pmatrix};$$

(2) $$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

14. Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$, où

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$ (2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des cas ci-dessus, trouver la dimension de $\mathcal{N}(T)$ et celle de $\mathrm{Im}(T)$, et en déterminer si T est injective et si T est surjective.

15. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver la matrice qui définit T.

(2) Vérifier, à l'aide du corollaire 5.3.7, que T est injective.

(3) À l'aide de la proposition 5.3.8, donner l'image par T du triangle Δ de sommets $p_1 = (1, 1), p_1 = (1, -1)$, et $p_3 = (0, 2)$.

16. Donner une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie le segment d'extrémités $p_1 = (1, 2)$ et $p_2 = (-1, 1)$ en le segment d'extrémités $q_1 = (1, 1, -1)$ et $q_2 = (0, 1, -1)$.

17. Dans chacun des cas suivants, trouver la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la matrice donnée.

(1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y + z \\ 2x - y + 2z \\ 3x + 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(2) Donner une base pour chacun de $\mathcal{N}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.
(3) Donner la valeur de a pour que $u \in \mathrm{Im}(T)$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Donner la valeur de b pour que $v \in \mathcal{N}(T)$, où

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

19. Dans chacun des cas suivants, trouver la dimension de chacun de $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$, et en déterminer si T est un automorphisme ou non.

(1) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(2) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linéaire telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \; T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; T(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \; T(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. Considérer la projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des y comme suit:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Donner, à l'aide du théorème 5.3.3, la matrice de p_y dans la base suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Trouver les coordonnées de $u = 2u_1 - 5u_2$ et celles de $T(u)$ dans la base $\{u_1, u_2\}$. *Indice*: Appliquer le théorème 5.4.5.

21. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x + y - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver la matrice de T dans la base de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Indice: D'abord, trouver la matrice de T dans la base canonique à l'aide du lemme 5.4.3; et ensuite, appliquer le théorème 5.4.4.

(2) Donner les coordonnées de $T(u)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indice: D'abord, trouver les coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à l'aide de la proposition 4.2.9, et ensuite; appliquer le théorème 5.4.5.

22. Trouver la transformation linéaire T de $\mathbb{R}^2$ telle que $T(u_1) = -u_1$ et $T(u_2) = u_2$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indice: Vérifier que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

23. Trouver une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^3$ telle que $T(u_1) = 2u_1$, $T(u_2) = 3u_2$, et $T(u_3) = 4u_3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indice: D'abord, vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et trouver la matrice de T dans cette base; et ensuite, trouver la matrice de T dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide du théorème 5.4.4.

24. Dans chacun des suivants, déterminer si la transformation linéaire T est un automorphisme ou non; et si oui, trouver son inverse T^{-1}.

(1) $\quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$;

(2) $\quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$.

25. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + 3y - z \\ 4x + 5y + 2z \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que T est un automorphisme.

(2) Calculer T^{-1}, l'inverse de T.

(3) Donner la matrice de T dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Donner la matrice de passage de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\}$.

26. Dans chacun des cas suivants, trouver les valeurs de a pour que T soit un automorphisme.

(1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ a & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire satisfaisant à la condition suivante:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ T(e_2) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

27. Calculer

(1) $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$; (2) $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$;

(3) $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$; (4) $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$.

28. Dans chacun des cas suivants, trouver un argument du vecteur donné.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

29. Pour tout angle θ, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vérifier, pour tous angles θ, ψ, que $A_\theta A_\psi = A_{\theta+\psi}$.

30. Soit ρ la rotation du plan d'un angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

avec $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(1) Trouver la matrice de $\rho \circ T$ et celle de $T \circ \rho$ dans $\{e_1, e_2\}$.

(2) Calculer l'image de u par $\rho \circ T$ et celui par $T \circ \rho$, et en déterminer si $\rho \circ T = T \circ \rho$ ou non, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

31. Considérer la projection perspective $\mathscr{P}_{-3}$ de centre $\mathbf{0}$ sur le plan affine $\mathscr{Z}_{-3}$. Soit Δ le triangle de sommets $p_1 = (1, 0, 1)$, $p_2 = (0, 1, 1)$ et $p_3 = (0, 0, 1)$.

(1) Calculer $q_i = \mathscr{P}_{-3}(p_i)$, pour $i = 1, 2, 3$.

(2) Vérifier que l'image de Δ par $\mathscr{P}_{-3}$ est le triangle de sommets q_1, q_2, q_3.

Indice: D'après la proposition 4.4.8, tout $p \in \Delta$ s'écrit

$$p = (1 - s - t)p_1 + sp_2 + tp_3; 0 \leq s, t, 1 - s - t \leq 1.$$

D'abord, calculer $\mathscr{P}_{-3}(p)$ à l'aide de la matrice en coordonnées homogènes de $\mathscr{P}_{-3}$.
Pour la partie (1), spécifier les valeurs $(s, t) = (0, 0)$; $(s, t) = (1, 0)$ et $(s, t) = (0, 1)$.
Pour la partie (2), vérifier que $\mathscr{P}_{-3}(p) = (1 - s - t)q_1 + sq_2 + tq_3$.

Chapitre VI: Diagonalisation

Comme on a déjà vu, une transformation linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est complètement déterminée par sa matrice dans une base. Le but de ce chapitre est d'étudier quand on peut trouver une base dans laquelle la matrice de la transformation linéaire est diagonale. Comme les matrices d'une transformation linéaire dans deux bases sont semblables, ceci se ramène au problème quand une matrice carrée est semblable à une matrice diagonale. Pour ce faire, on a besoin de notions de valeurs propres et de vecteurs propres. En tant qu'application de valeurs propres en informatique, On parlera de l'algorithme PageRank.

6.1. Diagonalisation de matrices et de transformations linéaires

6.1.1. Définition. Une matrice carrée A est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Remarque. Une matrice diagonale est diagonalisable.

Exemple. Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On voit que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 1.2.11, on a

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \left(2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

C'est-à-dire,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple conduit à la définition suivante.

6.1.2. Définition. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur non nul $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au_0 = \lambda_0 u_0$. Dans ce cas, u_0 est dit *vecteur propre* associé à λ_0.

Remarque. (1) Un vecteur propre est non nul, mais une valeur propre peut être nulle.

(2) Si u_0 est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ_0, alors au_0 l'est aussi pour tout nombre réel non nul a.

Le résultat suivant explique les matrices impliquées dans la diagonalisation d'une matrice.

6.1.3. Théorème. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, A admet n vecteurs propres linéairement indépendants $u_1, \ldots, u_n$. Dans ce cas, $P = (u_1 \cdots u_n)$ est inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où λ_i est la valeur propre à laquelle u_i est associé.

Le résultat précédent nous dit qu'une matrice carrée est diagonalisable si elle possède assez de vecteurs propres linéairement indépendants. On va étudier comment trouver les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

6.1.4. Définition. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et λ une variable. On appelle

$$\chi_{_A}(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

le *polynôme caractéristique* de A.

Exercice. Calculer $\chi_A(\lambda)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Voici le résultat pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée.

6.1.5. Théorème. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équaivalents.
(1) λ_0 est une valeur propre de A.
(2) λ_0 est une racine de $\chi_{_A}(\lambda)$.
(3) $\mathrm{rg}(A - \lambda_0 I_n) < n$.

Remarque. Comme $\chi_{_A}(\lambda)$ est de degré n, A a au plus n valeurs propres réelles.

Exercice. Trouver les valeurs propres réelles des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment trouver les vecteurs propres d'une matrice carrée associés à une valeur propre donnée.

6.1.6. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont λ_0 est une valeur propre.

(1) Un vecteur $u_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à λ_0 si, et seulement si, u_0 est un vecteur non nul de $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$.

(2) Une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$ est une famille libre maximale de vecteurs propres de A associés à λ_0.

Remarque. Soit λ_0 une valeur propre de A.

(1) $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$ s'appelle l'*espace propre* de A associé à λ_0.

(2) $\dim\mathcal{N}(A-\lambda_0 I_n) = n-\mathrm{rg}(A-\lambda_0 I_n)$, appelée *multiplicité géométrique* et notée $\mathrm{mg}(\lambda_0)$.

(3) $\mathrm{mg}(\lambda_0)$ est le plus grand nombre de vecteurs propres linéairement indépendants de A associés à λ_0.

Exercice. On a vu que 10 est une valeur propre de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la multiplicité géométrique de la valeur propre 10.

(2) Donner une famille libre maximale de vecteurs propres de A associés à 10.

On est prêt de donner un critère pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable et une méthode pour la diagonaliser si c'est possible.

6.1.7. Théorème. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(1) $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{n_s}$, où $n_i > 0$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ lorsque $i \neq j$.

(2) $\mathrm{mg}(\lambda_i) = n_i$, pour $i = 1, \ldots, s$.

Dans ce cas, si $\mathcal{B}_i$ est une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$, pour $i = 1, \ldots, s$, alors

$$\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_s$$

est base de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de A, qui forment une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\left\{ \overbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}^{n_1}, \ldots, \overbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}^{n_s} \right\}.$$

Plus précisément, la j-ième colonne de P est un vecteur propre associé au j-ième terme diagonal de $P^{-1}AP$, pour $j = 1, \ldots, n$.

Exercice. Vérifier si les matrices suivantes sont diagonalisables ou non.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice. Donner une décomposition $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D une matrice diagonale, où

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

On conclut cette section avec la diagonalisation de transformation linéaire.

6.1.8. Définition. Une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^n$ est dite *diagonalisable* s'il existe une base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$[T]_{\{u_1,\cdots,u_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, $T(u_i) = \lambda_i u_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Dans ce cas, on dit aussi que T est un *changmenet d'échelle*.

Voici le critère et le procédé de la diagonalisation d'une transformation linéaire.

6.1.9. Théorème. Une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable si, et seulement si, sa matrice A dans la base canonique est diagonalisable. Dans ce cas, si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivement, alors

$$[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exercice. Diagonaliser la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 3x - 5y + 3z \\ 6x - 6y + 4z \end{pmatrix}.$$

6.2. L'algorithme PageRank

Un réseau de pages web se compose d'un nombre fini de pages et des liens entre eux. Un moteur de recherche affiche des pages web selon leur importance de telle sorte que la page la plus importante apparaît en premier. Le PageRank, inventé par Larry Page, est l'algorithme utilisé par Google pour classer des pages web. Pour établir le modèle mathématique, on doit représenter un rśeau de pages web par un graphe orienté.

6.2.1. Définition. Un réseau de n pages web est représenté par un graphe orienté tel que défini ci-dessous:
(1) Les pages sont représentées par les entiers $1, 2, \dots, n$.
(2) Un lien de la page i vers la page j sera représenté par une flèche $i \to j$.

Exemple. Le graphe orienté suivant représente un réseau de 4 pages web et 8 liens.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1} \arrow[r, shift left] \arrow[d] \arrow[dr, shift left] & \boxed{3} \arrow[l, shift left] \\
\boxed{2} \arrow[r] \arrow[ur] & \boxed{4} \arrow[u] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

6.2.2. Définition. Soit W un réseau des pages web $1, 2, \dots, n$. Soit l_j le nombre de liens sortant de la page j, pour $j = 1, 2, \dots, n$. On définit *matrice des liens* de W comme suit:

$$L = (l_{ij})_{n \times n},$$

où

$$l_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, & \text{s'il existe un lien de la page } j \text{ vers la page } i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algorithme PageRank attribue à chaque page une valeur entre 0 et 1, appelée *score d'importance*, selon le principal suivant: le score d'importance d'une page est d'autant plus grand qu'elle a un grand nombre de pages importantes la référençant.

6.2.3. Définition. Soit W un réseau des pages web $1, \dots, n$. Soit l_j le nombre de liens sortant de la page j, pour $j = 1, \dots, n$. À chaque page i, on donne une valeur x_i avec $0 < x_i < 1$, appelée *score d'importance* de la page i, de sorte que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ et

$$x_i = \sum_{\exists\, j \to i} \frac{x_j}{l_j} = \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j, \ i = 1, \dots, n.$$

Dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

s'appelle un *vecteur des scores d'importance.*

Le résultat suivant donne l'interprétation mathématique d'un vecteur des scores d'importance.

6.2.4. Proposition. Soit W un réseau de pages web dont la matrice des liens est L. Un vecteur des scores d'importance de W est un vecteur propre de L associé à la valeur propre 1 dont les termes sont strictement positifs et somment à 1.

On étudiera quand un réseau de pages web admet un seul vecteur des scores.

6.2.5. Définition. Un réseau de pages web est dit *fortement connexe* si toutes les deux pages distinctes i, j peuvent être rejointes par un chemin comme suit:

$$i \longrightarrow j_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_s \longrightarrow j.$$

Remarque. Un réseau de pages web est fortement connexe si et seulement si son graphe orienté admet un cycle orienté passant par toutes les pages.

Exemple. Le réseau de pages web suivant est fortement connexe:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1} \arrow[r, shift left] \arrow[d] \arrow[dr, shift left] & \boxed{3} \arrow[l, shift left] \\
\boxed{2} \arrow[r] \arrow[ur] & \boxed{4} \arrow[u] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

En effet, on trouve un cycle orienté comme suit:

$$\boxed{1} \longrightarrow \boxed{2} \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow \boxed{3} \longrightarrow \boxed{1}.$$

6.2.6. Théorème. Soit W un réseau de pages web dont L est la matrice des liens. Si W est fortement connexe, alors L admet un vecteur propre u_0 associé à la valeur 1; et si a est la somme des termes de u_0, alors

$$v = \frac{1}{a}\, u_0$$

est le seul vecteur des scores d'importance pour W.

Exercice. Donner un vecteur des scores d'importance du réseau de pages web suivant:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1} \arrow[r, shift left] \arrow[d] \arrow[dr, shift left] & \boxed{3} \arrow[l, shift left] \\
\boxed{2} \arrow[r] \arrow[ur] & \boxed{4} \arrow[u] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

6.3. Exercices

1. Considérer la matrice réelle suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que la valeur 2 est une valeur propre de A; et calculer sa multiplicité géométrique.

2. Dans chacun des cas suivants, trouver la valeur réelle de a pour que la valeur 3 soit une valeur propre, et dans ce cas, calculer la multiplicité géométrique de 2.

   (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement si la valeur 0 n'est pas valeur propre A.

4. Soit A une matrice inversible. Montrer que si λ_0 est une valeur propre de A, alors $\dfrac{1}{\lambda_0}$ est une valeur propre de A^{-1}.

5. Diagonaliser, si possible, la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Vérifier que la transformation linéaire suivante est un changement d'échelle :

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

7. Diagonaliser la transformation linéaire suivante :

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x - 4y - 8z \\ 4x + 6y + 4z \\ 6x + 4y + 10z \end{pmatrix}.$$

8. (**MATLAB**) Considérer la matrice

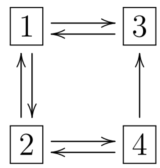
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver le polynôme caractéristique de A.

(2) Trouver les valeurs propres de A.

(3) Donner une décomposition $A = PDP^{-1}$, avec P inversible et D diagonale.

9. Soit W un réseau de pages web représenté par le graphe suivant:

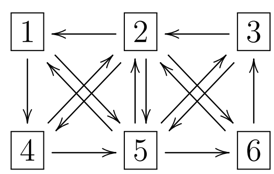


(1) Donner la matrice des liens L de W.

(2) Vérifier que W est fortement connexe.

(3) Donner le vecteur des scores d'importance de W.

10. (**MATLAB**) Donner le vecteur des scores d'importance du réseau des pages web suivant:



Chapitre VII: Espaces euclidiens

Outre la structure d'espace vectoriel réel, le plan admet une géométrie euclidienne qui mésure la longueur, la distance, et l'angle de vecteurs. Le but de ce chapitre est de généraliser ces notions aux espaces vectoriels réels de dimensions supérieures.

7.1. Produit scalaire

La géométrie euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est basée sur la notion de produit scalaire tel que défini ci-dessous.

7.1.1. Théorème. Le *produit scalaire* sur $\mathbb{R}^n$ est, par définition, la fonction de deux variables suivante:

$$< \, , \, >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto < u, v > := u^T v,$$

qui est bilinéaire, symétrique et défini positif, c'est-à-dire, pour $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

(1) $< au + bv, w > = a < u, w > + b < v, w >$; $< u, av + bw > = a < u, v > + b < u, w >$;

(2) $< u, v > = < v, u >$;

(3) $< u, u >$ est strictement positif pour tout $u \neq \mathbf{0}$.

Remarque. Muni du produit scalaire, l'espace réel $\mathbb{R}^n$ s'appelle *espace euclidien.*

À l'aide de la notion du produit scalaire, on a une autre interprétation du produit de matrices suivante.

7.1.2. Lemme. Si $A = (A_1 \cdots A_m) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ et $B = (B_1 \cdots B_p) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ sont partagées en colonnes, alors

$$A^T B = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix} (B_1 \cdots B_p) = (A_i^T B_j)_{m\times p} = (< A_i, B_j >)_{m\times p} \, .$$

Exercice. À l'aide de la proposition 7.1.2, calculer $A^T B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On généralise la notion de la longueur d'un vecteur du plan comme suit.

7.1.3. Définition. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on définit la *longueur* de u comme étant

$$||u|| = \sqrt{< u, u >},$$

un nombre réel non négatif. En outre, un vecteur de longueur 1 est dit *unitaire*.

Le résultat suivant est évident.

7.1.4. Lemme. Soient $u \in \mathbb{R}^n$ et $a \in R$.
(1) $||au|| = |a| \cdot ||u||$.
(2) $u \neq \mathbf{0}$ si, et seulement si, $||u|| \neq 0$.
(3) Si $u \neq \mathbf{0}$, alors $\frac{u}{||u||}$ est unitaire, appelé le vecteur unitaire de *même direction* que u.

Exercice. Donner le vecteur unitaire de même direction que le vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

7.1.5. Définition. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, alors $||u - v||$ s'appelle *distance* entre u et v, notée $d(u, v)$.

Exercice. Calculer la distance entre les vecteurs suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

La longueur de vecteur satisfait à une inégalité importante énoncées ci-dessous.

7.1.6. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, alors

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous permet de généraliser la notion d'un angle dans le plan comme suit.

7.1.7. Définition. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tous non nuls. Comme

$$\frac{| < u, v > |}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1,$$

il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}.$$

On appelle θ *angle non orienté* entre u et v.

Exercice. Trouver l'angle non-orienté θ entre les vecteurs suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

7.2. Orthogonalité

7.2.1. Définition. Deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont dits *orthogonaux*, noté $u \perp v$, si $< u, v >= 0$.

Remarque. (1) Si $u \in \mathbb{R}^n$, alors $u \perp \mathbf{0}$.

(2) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont tous non nuls, alors ils sont orthogonaux si, et seulement si, l'angle non orienté entre eux est $\frac{\pi}{2}$.

7.2.2. Lemme. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors

$$F^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v, \text{ pour tout } v \in F\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé *orthogonal* de F.

Exercice. Soit D_x l'axe des x de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que $D_x^{\perp} = P_{y,z}$, le plan des y, z.

Le résulat nous dit en particulier comment calculer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel lorsqu'un ensemble des générateurs est connu.

7.2.3. Théorème. Soit F un sous-espavce vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(1) $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = n$.

(2) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

(3) Si F est engendré par $v_1, \ldots, v_r$, alors

$$F^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v_i, i = 1, \ldots, r\}.$$

Exercice. Soit ℓ la droite vectorielle définie par $2x - y = 0$. Trouver $\ell^{\perp}$.

7.2.4. Corollaire. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{C}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^T)$.

Exercice. Trouver une base de $F^{\perp}$, où F est le sous-espace vectoriel engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Plus généralement, on a la notion suivante.

7.2.5. Définition. Soit $r \geq 1$. Une famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite
(1) *orthogonale* si $< u_i, u_j >= 0$, pour tous $1 \leq i, j \leq r$ avec $i \neq j$;
(2) *orthonormée* si, pour tous $1 \leq i, j \leq r$, on a

$$< u_i, u_j >= \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j; \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Remarque. Une famille d'un seul vecteur est orthogonale.

Le résultat suivant nous comment obtenir une famille orthonormée à partir d'une famille orthogonale.

7.2.6. Lemme. Soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si les u_i sont tous non nuls, alors $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est libre, qui induit une famille orthonormée

$$\left\{ \frac{u_1}{||u_1||}, \ldots, \frac{u_r}{||u_r||} \right\}.$$

Remarque. En générale, une famille orthogonale n'est pas nécessairement libre. Cependant, une famille orthonormée est toujours libre.

7.2.7. Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Une base de F est dite *orthogonale* ou *orthonormée* si elle est une famille orthogonale ou orthonormée, respectivement.

Exemple. La base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée.

Le résultat suivant est évident.

7.2.8. Lemme. Si D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ engendrée par un vecteur u, alors $\{u\}$ est une base orthogonale de D, et

$$\left\{ \frac{u}{||u||} \right\}$$

est une base orthonormée de D.

Le résultat suivant est une conséquence des lemmes 7.1.2, 7.2.7, et 4.3.4.

7.2.9. Proposition. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$ si et seulement si $A^TA = I_n$.

Exercice. Vérifier que

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

7.2.10. Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, dont $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base orthonormée. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on définit sa *projection orthogonale* sur F par

$$\mathrm{proj}_F v = < u_1, v > u_1 + \cdots + < u_r, v > u_r.$$

Exemple. Soit P_{xy} le plan-xy de $\mathbb{R}^3$, dont $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée. Pour tout

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

on voit que

$$\mathrm{proj}_{P_{x,y}} v = < e_1, v > e_1 + < e_2, v > e_2 = xe_1 + ye_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

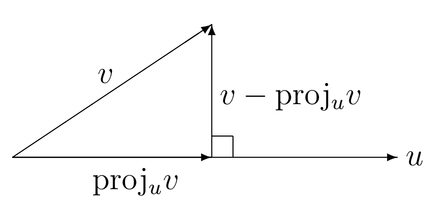
On considère un cas particulier de la projection orthogonale sur une droite.

7.2.11. Proposition. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ engendrée par un vecteur u. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a

(1) $\mathrm{proj}_D v = \frac{<u,v>}{<u,u>} u$;

(2) $v - \mathrm{proj}_D v \in D^\perp$.

Remarque. On écrit $\mathrm{proj}_u v = \mathrm{proj}_D v$, appelé *projection orthogonale* de v sur u. Ceci est illustrée par le diagramme suivant:



Exercice. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $u \perp (v - \mathrm{proj}_{\,u} v)$.

Le résultat suivant ramasse les propriétés de projection orthogonale.

7.2.12. Théorème. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, ayant une base orthonormée $\{u_1, \ldots, u_r\}$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a

(1) $v - \mathrm{proj}_{\,F} v \in F^{\perp}$;

(2) $v \in F$ si et seulement si $v = \mathrm{proj}_{\,F} v$, c'est-à-dire,

$$v = < u_1, v > u_1 + \cdots + < u_r, v > u_r.$$

Remarque. En particulier, le théorème 7.2.12(2) donne une méthode facile à trouver les coordonnées d'un vecteur de F dans la base orthonormée $\{u_1, \ldots, u_r\}$.

Exercice. Considérer les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Trouver la colonne des coordonnées de v dans la base orthonormée $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Le résultat suivant affirme en particulier que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormée.

7.2.13. Procédé de Gram-Schmidt. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, dont $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base. Si l'on pose successivement

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1; \\
v_2 &= u_2 - \tfrac{<v_1, u_2>}{<v_1, v_1>} v_1; \\
v_3 &= u_3 - \tfrac{<v_1, u_3>}{<v_1, v_1>} v_1 - \tfrac{<v_2, u_3>}{<v_2, v_2>} v_2; \\
&\vdots \\
v_r &= u_r - \tfrac{<v_1, u_r>}{<v_1, v_1>} v_1 - \tfrac{<v_2, u_r>}{<v_2, v_2>} v_2 - \cdots - \tfrac{<v_{r-1}, u_r>}{<v_{r-1}, v_{r-1}>} v_{r-1},
\end{aligned}$$

alors $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est une base orthogonale de F, et donc

$$\left\{ \frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||}, \cdots, \frac{v_r}{||v_r||} \right\}$$

est une base orthonormée de F.

Exercice. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$.
(2) Calculer $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} v$.
(3) Déterminer si $v \in \mathcal{C}(A)$ ou non.

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang n. D'après le corollaire 4.3.8, les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à cette base, on obtient une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$. En vue de la construction du Gram-Schmidt, on obtient le résultat suivant.

7.2.14. Théorème. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang n. Soit $\{C_1, \ldots, C_n\}$ la base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$ obtenue en appliquant Gram-Schmidt aux colonnes de A. Si l'on pose $Q = (C_1 \cdots C_n)$, alors $Q^TQ = I_n$ et $R = Q^TA$ est triangulaire supérieure de type $n \times n$ telles que

$$A = QR,$$

appelée *décomposition* QR de A.

Exercice. Donner une décomposition QR de la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.3. Géométrie analytique

Le but de cette section est d'appliquer les résultats de la section précédante pour étudier la géométrie de l'espace $\mathbb{R}^3$. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème 7.2.3(1), $P^\perp$ est de dimension 1, c'est-à-dire, une droite vectorielle engendré par un vecteur non nul. Cette observation conduit à la notion suivante.

7.3.1. Définition. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Un vecteur non nul de $P^\perp$ s'appelle *vecteur normal* à P.

Le résultat suivant sera utile pour trouver l'équation d'un plan vectoriel.

7.3.2. Proposition. Un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'équation

$$ax + by + cz = 0$$

si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à P.

On va donner une méthode pour trouver un vecteur normal à un plan vectoriel, en utilisant la notion du produit vectoriel tel que défini ci-dessous.

7.3.3. Définition. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

on définit le *produit vectoriel* de u et v par

$$u \wedge v = (y_1 z_2 - y_2 z_1)e_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)e_3 \in \mathbb{R}^3,$$

c'est-à-dire,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & e_1 \\ y_1 & y_2 & e_2 \\ z_1 & z_2 & e_3 \end{vmatrix},$$

un déterminant formel développé suivant la dernière colonne.

On rassemble des propriétés élémentaires du produit vectoriel dans le résultat suivant.

7.3.4. Proposition. Soient u, v des vecteurs non co-linéaires de $\mathbb{R}^3$.
(1) $u \wedge v = -(v \wedge u)$.
(2) $u \wedge v$ est un vecteur normal au plan vectoriel engendré par u et v.
(3) $\det(u, v, u \wedge v) = ||u \wedge v||^2 > 0$.

Exercice. Donner une équation cartésienne du plan vectoriel P engendré par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

7.3.5. Corollaire. Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ sont orthogonaux et tous non nuls, alors $\{u, v, w = u \wedge v\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(u\, v\, w) > 0$.

Exemple. Prolonger u en une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut cette section par la notion d'un angle orienté entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

7.3.6. Définition. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ auquel w est un vecteur normal. Si $u, v \in P$ sont non nuls, alors un angle de u à v *orienté par* w est un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\det(u\, v\, w)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||}.$$

Exercice. Donner un angle θ de u à v orienté par $v \wedge u$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

7.4. Matrices orthognales

Le but de cette section est d'étudier une classe importante de matrices, appelées *matrice orthogonales.* En appliquant la Proposition 7.2.9, on a le résultat suivant.

7.4.1. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, dont les colonnes sont $A_1, \ldots, A_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
(2) $A^T A = I_n$.
(3) A est inversible avec $A^{-1} = A^T$.
Dans ce cas, on dit que A est *orthogonale.*

Remarque. Soit A une matrice orthogonale.
(1) Si l'on permute des colonnes de A, la matrice résultante est orthogonale.
(2) Si l'on multiplie une colonne de A par -1, la matrice résultante est orthogonale.

Exemple. (1) Une matrice identité est orthogonale.
(2) Pour tout angle θ, les matrices suivantes sont orthogonales:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.4.2. Lemme. Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sont orthogonales, alors AB est orthogonale.

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 7.2.14.

7.4.3. Corollaire. Si A est une matrice inversible, alors

$$A = QR,$$

où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure.

Le résultat suivant, un cas particulier des théorèmes 4.2.9 et 4.2.10, nous dit comment calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée et comment trouver la matrice de passage entre deux bases orthonormées.

7.4.4. Théorème. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base orhtonormée de $\mathbb{R}^n$.
(1) Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$P^{\{u\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = (u_1 \ \cdots \ u_n)^T u.$$

(2) Des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée si, et seulement si, $P^{\{v_1,\ldots,v_n\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est orthogonale; et dans ce cas,

$$P^{\{v_1,\ldots,v_n\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = (u_1 \ \cdots \ u_n)^T (v_1 \ \cdots \ v_n).$$

Exercice. Considérons deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$ suivantes:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Donner les coordonnées dans la base $\{u_1, u_2\}$ du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Donner la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{v_1, v_2\}$.

7.5. Matrices symétriques

Le but de cette section est d'étudier les matrices symétriques. On montrera que toute matrice symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale. En tant qu'application, on donnera la décomposition en valeurs singulières d'une matrice quelconque.

7.5.1. Proposition. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors
(1) $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$;
(2) deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Voici le procédé de la diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale, qui sera utile dans la mécanique quantique.

7.5.2. Théorème de l'axe principal. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ est diagonale, où P est trouvée de la façon suivante.

(1) On factorise $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{n_s}$ avec $n_i > 0$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ lorsque $i \neq j$.
(2) Pour chaque $i = 1, \ldots, s$, on trouve
  (i) une base $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$, en résolvant $(A - \lambda_i I_n)X = 0$.
  (ii) une base orthonormée $\mathcal{O}_i$ de $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}_i$.

(3) Cela nous donne une base orthonormée $\mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_s$ de $\mathbb{R}^n$, dont les vecteurs forment une matrice orthogonale P telle que

$$P^{-1}AP = P^TAP = \operatorname{diag}\left\{\overbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}^{n_1}, \ldots, \overbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}^{n_s}\right\}.$$

Exercice. Donner une décomposition $A = PDP^T$, avec P orthogonale, D diagonale et

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.6. Transformations orthogonales

Le but de cette section est d'étudier les transformations orthogonales telles que définies ci-dessous.

7.6.1. Définition. Une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^n$ est dite *orthogonale* si, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$< T(u), T(v) > = < u, v > .$$

Exemple. L'application identité suivante est orthogonale.

$$\mathbb{1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto u.$$

Voici des propriétés des transformations orthogonales.

7.6.2. Proposition. Soit T une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
(1) Si $u \in \mathbb{R}^n$, alors $||T(u)|| = ||u||$.
(2) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, alors $d(T(u), T(v)) = d(u, v)$.
(3) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont non nuls, alors l'angle non orienté entre $T(u)$, $T(v)$ est égal à celui entre u, v.

Remarque. Une transformation orthogonales de $\mathbb{R}^n$, avec $2 \leq n \leq 3$, transforme les rectangle en rectangles, et les carrés en carrés.

Le résultat suivant donne une méthode pour vérifier si une transformation linéaire est orthogonale ou non.

7.6.3. Théorème. Soit T une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) T est orthogonale.
(2) $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
(3) $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est orthogonale.

Remarque. Une transformation orthogonale est un automorphisme.

Exemple. La rotation ρ_θ d'un angle θ du plan est orthogonale. En effet, $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$[\rho]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ce qui est orthogonale. D'après le théorème 7.6.3, ρ_θ est orthogonale.

On va définir les rotations de $\mathbb{R}^3$, qui sont orthogonales.

7.6.4. Définition. Soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par u, ce qui est normal au plan $L^\perp$. La *rotation* $\rho_{\theta,u}$ *autour de* L *d'angle* θ *orienté par* u est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant les deux conditions suivantes.
(1) Si $v \in L$, alors $\rho_{\theta,u}(v) = v$.
(2) Si $v \in L^\perp$ est non nul, alors $\rho_{\theta,u}(v) \in L^\perp$ est non nul et l'angle de v à $\rho_{\theta,u}(v)$ orienté par u est θ.

Remarque. En bref, on appelle $\rho_{\theta,u}$ la rotation d'angle θ autour de u.

Le résulat suivant nous dit comment calculer les rotations de $\mathbb{R}^3$.

7.6.5. Théorème. Soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par u. Si $\{u, v, w\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(u\,v\,w) > 0$, alors

$$\left\{u_1 = \frac{u}{||u||},\ u_2 = \frac{v}{||v||},\ u_3 = \frac{w}{||w||}\right\}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$[\rho_{\theta,u}]_{\{u_1,u_2,u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En particulier, toute rotation de $\mathbb{R}^3$ est orthogonale.

Exercice. Trouver la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de e_1.

Solution. On sait que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(e_1\,e_2\,e_3) = 1$. D'après le théorème 7.6.5, on a

$$[\rho_{\theta,e_1}]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, la formule en coordonées canoniques de $\rho_{_{\theta,e_1}}$ est la suivante:

$$\rho_{_{\theta,e_1}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Voici un procédé pour calculer une rotation de $\mathbb{R}^3$, ce qui est une conséquence du lemme 7.2.6, la proposition 7.3.4, le théorème 7.6.5, et le théorème 5.4.4.

7.6.6. Théorème. Soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par un vecteur u. On veut calculer la rotation ρ autour de L d'angle θ orienté par u.

(1) On trouve $v \in \mathbb{R}^3$ non nul avec $< u, v >= 0$.

(2) On calcule $w = u \wedge v$.

(3) On obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\left\{u_1 = \frac{u}{||u||},\ u_2 = \frac{v}{||v||},\ u_3 = \frac{w}{||w||}\right\}.$$

(4) D'après le théorème 7.6.5, on a

$$[\rho]_{\{u_1,u_2,u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} := A.$$

(5) Comme $P = (u_1u_2u_3)$ est orthogonale, d'après le théorème 5.3.4, on a

$$[\rho]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = PAP^T.$$

Exercice. Soit L la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la rotation ρ autour de L d'angle $\frac{\pi}{3}$ orienté par u.

On conclut cette section par une application dans la stéréovision.

7.6.7. Théorème. Soit M un objet situé à la position (a, b, c) dans un repère caméra initial de $\mathbb{R}^3$. Si l'on tourne la caméra d'angle θ autour d'un vecteur non nul u, alors la position (x, y, z) de M dans le nouveau repère caméra est donnée par

$$(x, y, z) = (a, b, c)B,$$

où B est la matrice de $\rho_{\theta,u}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Dans un repère caméra initial de $\mathbb{R}^3$, un objet M est situé à la position $(1, 1, -2)$. On tourne la caméra d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la position de M dans le nouveau repère caméra de $\mathbb{R}^3$.

7.7. Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et par Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales à un modèle mathématique censé décrire ces données.

7.7.1. Définition. Soit un système d'équations linéaires

$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Un vecteur $S \in \mathbb{R}^n$ s'appelle *solution à moindres carrés* si

$$||AS - B|| \leq ||Au - B||$$

pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$.

Remarque. Si le système $AX = B$ est compatible, alors une solution à moindres carrés est une solution exacte.

Le résultat suivant nous donne une méthode très pratique pour trouver les solutions à moindres carrés d'un système d'équations linéaires.

7.7.2. Théorème. Soit un système d'équations linéaires

$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Un vecteur $S \in \mathbb{R}^n$ est une solution à moindres carrés de ce système si et seulement si S est une solution exacte du système compatible suivant:

$$(A^TA)X = A^TB.$$

Exercice. Trouver une solution à moindres carrés du système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & 4y & + & 2z & = & 3. \end{array}$$

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est de rang n, alors A^TA est définie positive. En particulier, A^TA est inversible. Cette observation nous donne le résultat suivant.

7.7.3. Corollaire. Soit un système d'équations linéaires

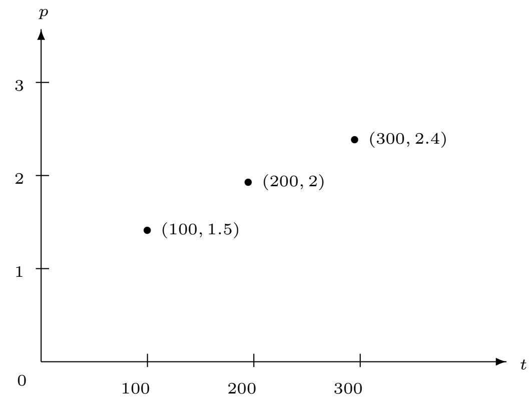
$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Si $\operatorname{rg}(A) = n$, alors le système admet une seule solution à moindres carrés donnée par

$$S = (A^TA)^{-1}A^TB.$$

Dans la pratique, on décrira la relation entre deux variables x et y selon des données observées. Ces données observées sont représentées par des points du plan. S'ils ont tendance à former une droite, on peut trouver une droite qui correspond le mieux à ces points.

Exercice. En enregistrant la pression (en atm) d'un gaz à température (en Celsius) différente, on obtient les données suivantes:



Donner l'estimation de la pression du gaz à 400 degrés Celsius.

Solution. Comme les points ont tendance à former une droite, on va trouver une droite qui correspond le mieux les données observées. Supposons que $p = at + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. D'après les données observées, on considère le système suivant:

$$\begin{array}{rcrcl} 100a & + & b & = & 1,5 \\ 200a & + & b & = & 2 \\ 300a & + & b & = & 2,4. \end{array}$$

Ceci nous donne

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 200 & 1 \\ 300 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,4 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, la matrice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 14 \times 10^4 & 6 \times 10^2 \\ 6 \times 10^2 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible, d'après le corollaire 7.7.3, le système a une seule solution à moindres carrés

$$S = (A^T A)^{-1}(A^T B) = \frac{1}{6 \times 10^4} \begin{pmatrix} 3 & -6 \times 10^2 \\ -6 \times 10^2 & 14 \times 10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12,7 \times 10^2 \\ 5,9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6 \times 10^4} \begin{pmatrix} 2,7 \times 10^2 \\ 6,4 \times 10^4 \end{pmatrix}.$$

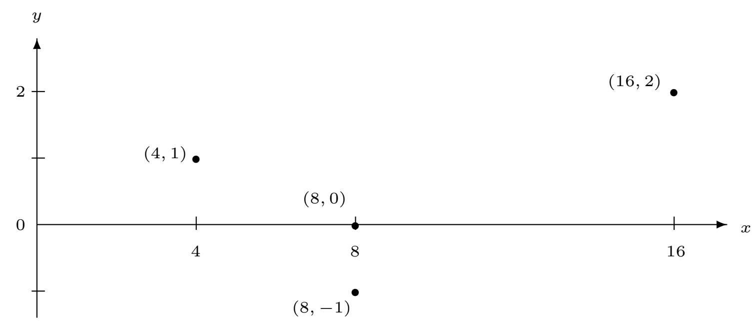
C'est-à-dire, la droite cherchée est définie par l'équation

$$p = \frac{2,7}{600} t + \frac{3,2}{3}.$$

Ainsi la pression sera environ 2,86 atm à la température 400 degrés Celsius.

Lorsque les points représentant des données expérimentales ont tendance à former une courbe, on peut trouver une fonction polynomiale qui correspond le mieux à ces points.

Exercice. Étant données des données expérimentales suivantes:



Donner une fonction polynomiale quadratique qui correspond le mieux à ces données.

Solution. On cherche une fonction $x = a + by + cy^2$. D'après les données observées, on obtient le système suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & 8 \\ a & & & & & = & 8 \\ a & + & b & + & c & = & 4 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 16. \end{array}$$

Ceci donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \text{ et } A^T B = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 76 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, $A^T A$ est inversible. D'après le corollaire 7.7.3, le système admet une seule solution à moindres carrés suivante:

$$S = (A^T A)^{-1}(A^T B) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, la function polynomiale quadratique cherchée est définie par l'équation

$$x = 5 - y + 3y^2.$$

7.8. Exercices

1. Dans chacun des cas suivants, à l'aide du Lemme 7.1.2, calculer $A^T B$.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Dans chacun des cas suivants, à l'aide du Lemme 7.1.2, calculer calculer $A^T A$.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Trouver le vecteur unitaire de même direction que le vecteur suivant:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Dans chacun des cas suivants, calculer la distance entre u et v.

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dans chacun des cas suivants, calculer l'angle non orienté entre u et v.

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad (2) \quad u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Donner une base de $F^{\perp}$, où F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. À l'aide du corollaire 7.2.4, donner une base de $\mathcal{C}(A)^{\perp}$, où

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (1) À l'aide du lemme 7.1.2, calculer $A^T A$.

   (2) Déterminer, à l'aide de la proposition 7.2.9, si les colonnes de A forment une base orthonormée ou non de $\mathcal{C}(A)$.

9. Vérifier, à l'aide de la proposition 7.2.9, que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Soient

$$A = (A_1\, A_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (1) En calculant $A^T A$, vérifier que A_1, A_2 forment une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$.

   (2) En calculant la projection orthogonale de v sur $\mathcal{C}(A)$, vérifier que $v \in \mathcal{C}(A)$.

   (3) Donner la projection orthogonale de u sur $\mathcal{C}(A)$, et en déterminer si u appartient à $\mathcal{C}(A)$ ou non.

11. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une base orthonormée du sous-espace vectoriel F engendré par u.

(2) Calculer la projection orthogonale de v sur F.

12. Déterminer si les vecteurs suivants forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ou non:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

13. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2, u_3, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthogonale de F.

(2) Donner, à l'aide du lemme 7.2.6 une base orthonormée de F.

(3) Donner la projection orthogonale de v sur F.

14. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2, u_3, u_4, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) À l'aide du théorème 4.3.9, donner une base de F.

(2) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, donner une base orthonormée de F.

(3) Calculer $\mathrm{proj}_F v$; et en déterminer si v appartient au F ou non.

15. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$;

(2) Donner une base pour chacun de $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(A)^{\perp}$.

(3) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux bases trouvées en (1), donner une base orthonormée pour chacun de $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(A)^{\perp}$.

16. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$;

(2) Donner une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$;

(3) Donner une décomposition QR de A.

17. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} \\ \frac{16}{25} \end{pmatrix};\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier, à l'aide du théorème 7.4.1, que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

(2) Trouver, à l'aide du théorème 7.4.4(1), la colonne des ccordonnées de u dans $\{u_1, u_2, u_3\}$.

18. Trouver les valeurs de a, b, c telles que la matrice suivante soit orthogonale.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & c \end{pmatrix}.$$

19. Donner une décomposition QR de la matrice inversible suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Considérer la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer les produits vectoriels $e_1 \wedge e_2$, $e_2 \wedge e_3$ et $e_3 \wedge e_1$.

21. Dans chacun des cas suivants, à l'aide de la proposition 7.3.4, trouver un vecteur normal au plan P engendré par u, v, et en donner une équation pour P.

$$(1)\ \ u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \ u = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

22. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner l'angle θ de u à v orienté par $u \wedge v$.
(2) Donner l'angle ϕ de u à v orienté par $v \wedge u$.

23. Dans chacun des cas suivants, diagonaliser la matrice symétrique donnée par une matrice orthogonale et déterminer si la matrice donnée est définie positive ou non.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Donner une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices suivantes.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Déterminer si la transformation linéaire suivante est orthogonale ou non:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

26. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice de la transformation linéaire T dans la base canonique; déterminer si T est orthogonale ou non; et si oui, donner son inverse en spécifiant la formule sous les coordonnées canoniques.

(1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b + 2c \\ 2a - 2b + c \\ -2a + b + 2c \end{pmatrix};$

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \end{pmatrix}.$

27. Soit ρ la rotation du plan d'angle $\frac{7\pi}{6}$.

(1) Donner la matrice de ρ dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(2) Calculer l'image par ρ du rectangle de sommets suivants:

$$p_1 = (0, -1), p_2 = (3, -1), p_3 = (0, 1), p_4 = (3, 1).$$

28. Soit ρ la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe des x d'angle $\frac{5\pi}{3}$ orienté par le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice de ρ dans base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer l'image par ρ du vecteur suivant

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

29. Soit L la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur suivant:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer la rotation ρ de $\mathbb{R}^3$ autour de L d'angle $\frac{5\pi}{6}$ orienté par v, c'est-à-dire, donner la matrice de ρ dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(2) Dans un repère caméra initial de $\mathbb{R}^3$, un objet M est situé à la position $(1, 0, 1)$. On tourne la caméra d'angle $\frac{5\pi}{6}$ autour du vecteur v. Trouver la position de M dans le nouveau repère caméra de $\mathbb{R}^3$. *Indice*: Utiliser le résultat de la partie (1).

30. Donner la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe des z d'angle $\frac{2\pi}{3}$ orienté par e_3.

31. Dans chacun des cas suivants, trouver la solution à moindres carrés du système:

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 9 \\ x & + & y & - & z & = & 3; \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 6. \end{array}$$

32. Trouver une solution à moindres carrés de chacun des systèmes suivants:

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 6; \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & & & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 9 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 6x_1 & + & x_2 & & & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & = & 0. \end{array}$$

33. Trouver la droite $y = a + bx$, qui correspond le mieux les données observées suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

34. Trouver la courbe quadratique $y = a + bx + cx^2$, qui correspond le mieux les données observées suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$