

# MAT 193: Algèbre linéaire

## Chapitre I: Algèbre matricielle

Le but principal de ce chapitre est d'étudier les opérations et les propriétés de matrices. Applications des matrices se trouvent dans la plupart des domaines scientifiques et du génie. En informatique et en infographie, elles sont utilisées pour classer l'importance des pages web, pour représenter des couleurs et pour projeter une image en 3 dimensions sur un écran en 2 dimensions.

Partout dans ce cours, on désigne par  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers, par  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels et par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

### 1.1. Matrices

Le but de cette section est d'introduire les opérations arithmétiques sur les matrices et d'étudier leurs propriétés. En tant qu'application, on parlera de coordonnées RVB des couleurs numériques et de la distribution de la population.

**1.1.1. Définition.** Une *matrice réelle* de type  $m \times n$  est un tableau rectangulaire de  $mn$  nombres réels rangés sur  $m$  lignes et  $n$  colonnes comme suit:

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_m \end{array} \end{array}$$

Le nombre  $a_{ij}$  s'appelle  $(i, j)$ -terme où  $i$  est l'*indice de ligne* et  $j$  est l'*indice de colonne*. Deux matrices sont dites *égales* si elles sont du même type et les termes en même position sont égaux.

La matrice est dite *nulle*, notée  $0_{m \times n}$ , si  $a_{ij} = 0$  pour tous  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ .

La matrice s'appelle une *matrice-ligne* si  $m = 1$ ; et une *matrice-colonne* si  $n = 1$ .

La matrice est dite *carrée d'ordre  $n$*  si  $m = n$ ; et dans ce cas,  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sont appelés les *termes diagonaux*.

Une matrice carrée  $(a)$  d'ordre 1 sera identifiée avec le nombre  $a$ .

**Notation.** On désignera par  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles de type  $m \times n$ ; et par  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ .

**Exemple.** On a des matrices réelles comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

où  $A = 0_{2 \times 3}$ , la matrice nulle de type  $2 \times 3$ ; et  $B$  est une matrice carée d'ordre 2, dont les termes diagonaux sont  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

En tant qu'application de matrices, on parlera de la couleur numérique.

**1.1.2. Définition.** Une couleur numérique  $C$  est obtenue en mélangeant le rouge, le vert et le bleu d'intensités  $r, v, b \in [0, 1]$ , respectivement. On appelle  $\{r; v; b\}$  les *coordonnées RVB* de  $C$  et identifie  $C$  à la matrice-colonne

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix}.$$

À titre d'exemple, on a le tableau suivant:

rouge	vert	bleu	blanc	noir	cyan	magenta	jaune	gris	pourpre
1	0	0	1	0	0	1	1	$\frac{1}{3}$	0,6
0	1	0	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	0
0	0	1	1	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	1

On introduira des opérations arithmétiques de matrices.

**1.1.3. Définition.** Soient  $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . On définit

- (1)  $a \cdot A = (aa_{ij})_{m \times n} = A \cdot a$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ ;
- (3)  $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$ .

**Remarque.** Si  $A$  et  $B$  ne sont pas du même type, alors ni  $A + B$  ni  $A - B$  n'est définie.

Les opérations matricielles définies dans la définition 1.1.3 satisfont aux axiomes énoncés dans le résultat suivant.

**1.1.4. Proposition.** Soient  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $1 \cdot A = A$ ;
- (2)  $(ab)A = a(bA)$ ;
- (3)  $(a \pm b)A = aA \pm bA$ ;
- (4)  $a(A \pm B) = aA \pm aB$ ;
- (5)  $A + 0_{m \times n} = A$ ;
- (6)  $A - A = 0_{m \times n}$ ;
- (7)  $A + B = B + A$ ;
- (8)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

**Remarque.** Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des matrices de même type, on définit

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = (\dots (A_1 + A_2) + \dots + A_{n-1}) + A_n.$$

On introduira la multiplication matricielle dans la définition suivante.

**1.1.5. Multiplication.** (1) Le produit d'une matrice de type  $1 \times n$  et une matrice de type  $n \times 1$  est une matrice de type  $1 \times 1$  définie par

$$(a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

(2) Si  $A = (a_{ik}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  et  $B = (b_{kj}) \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ , alors le *produit* de  $A$  et  $B$  est défini comme étant  $AB = (c_{ij})_{m \times p}$ , où

$$c_{ij} = (a_{i1} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p.$$

**Remarque.** (1) Si  $A = 0_{m \times n}$  ou  $B = 0_{n \times p}$ , alors  $AB = 0_{m \times p}$ .

(2) Si  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , alors  $AB \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice.** Donner le (1,2)-terme et le (3,1)-terme du produit  $AB$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

**Solution.** D'après la définition, le (1,2)-terme du produit  $AB$  est le produit de première ligne de  $A$  et la deuxième colonne de  $B$ , c'est-à-dire,

$$(2 \ 3 \ \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \times 2 + 3 \times 3 + \sqrt{2}\sqrt{2} = 15.$$

En outre, le (3,1)-terme de  $AB$  est

$$(1 \ \sqrt{3} \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

**1.1.6. Définition.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , la matrice carrée

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

s'appelle *matrice-identité* d'ordre  $n$ .

**Exemple.**

$$I_1 = (1); \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.1.7. Proposition.** Soient  $A, B, C$  des matrices réelles et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (1) Si  $AB$  et  $BC$  est définis, alors  $(AB)C = A(BC)$ .
- (2) Si  $AB$  est défini, alors  $(aA)(bB) = (ab)(AB)$ .
- (3) Si  $AB, AC$  sont définis et du même type, alors  $A(B + C) = AB + AC$ .
- (4) Si  $AC, BC$  sont définis et du même type, alors  $(A + B)C = AC + BC$ .
- (5) Si  $A$  est de type  $m \times n$ , alors  $I_m A = A = A I_n$ .

**Remarque.** (1) La multiplication matricielle n'est pas commutative. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Le produit  $AB$  peut être nul sans que  $A$  ou  $B$  est nulle. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des matrices telles que  $A_i A_{i+1}$  est défini pour  $i = 1, \dots, n-1$ , on définit alors

$$A_1 A_2 \cdots A_n = (\cdots (A_1 A_2) \cdots A_{n-1}) A_n.$$

**Exemple.** D'après la proposition 1.1.7(2), on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}.$$

On va donner deux résultats qui facilitent le calcul du produit de deux matrices. On commence par le cas où le facteur à droite est une matrice-colonne.

**1.1.8. Proposition.** Soit  $A$  une matrice réelle dont les colonnes sont  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Si  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , alors

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (A_1 A_2 \cdots A_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_n A_n.$$

**Exercice.** Calculer les produits suivants:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** D'après la proposition 1.1.8,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit que le calcul d'un produit de deux matrices générales se ramène au produit traité dans la proposition précédente.

**1.1.9. Proposition.** Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Si  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$  dont les colonnes sont  $B_1, B_2, \dots, B_p$ , alors

$$AB = A(B_1 B_2 \cdots B_p) = (AB_1 AB_2 \cdots AB_p).$$

**Exercice.** Calculer  $AB$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** D'après la proposition 1.1.9, on a

$$AB = \left( A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1.1.10. Définition.** Soit  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  une matrice carrée réelle. On dit que  $A$  est *diagonale* si  $a_{ij} = 0$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$  avec  $i \neq j$ .

**Exemple.** Les matrices suivantes sont diagonales

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant les propositions 1.1.8 et 1.1.9, on obtient le résultat suivant.

**1.1.11. Proposition.** Soit  $A = (A_1 A_2 \cdots A_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  partagée en colonnes. Si  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , alors

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = (a_1 A_1, a_2 A_2, \dots, a_n A_n).$$

**Exercice.** Calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** D'après la proposition 1.1.11, on a

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 3 \times \sqrt{2} & 4 \times 1 \\ 2 \times 3 & 3 \times \sqrt{3} & 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} & 4 \\ 6 & 3\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}.$$

**1.1.12. Définition.** Soit  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . On définit la *transposée* de  $A$  comme suit:

$$A^T = (a'_{ij})_{n \times m}, \text{ où } a'_{ij} = a_{ji}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m.$$

**Remarque.** (1) La  $i$ -ième ligne de  $A^T$  est la transposée de la  $i$ -ième colonne de  $A$ ;  
 (2) La  $j$ -ième colonne de  $A^T$  est la transposée de la  $j$ -ième ligne de  $A$ .

**Exercice.** À l'aide de la remarque ci-haut, trouver les transposées des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** En transposant les lignes de  $A$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en transposant les colonnes de  $B$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

**1.1.13. Proposition.** Soient  $A, B$  des matrices réelles et  $a \in \mathbb{R}$ .

(1)  $(A^T)^T = A$ .

(2)  $(aA)^T = aA^T$ .

(3) Si  $A, B$  sont de même type, alors  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .

(4) Si  $AB$  est défini, alors  $(AB)^T = B^T A^T$ .

**Exemple.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (AB)^T.$$

Remarquons que

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où,  $(AB)^T \neq A^T B^T$ .

**1.1.14. Définition.** Une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  est dite *symétrique* si  $A^T = A$ , c'est-à-dire,  $a_{ji} = a_{ij}$ , pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Remarque.** Une matrice diagonale est symétrique.

**Exercice.** Laquelle de  $A, B$  est symétrique?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On calcule

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = A; \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \neq B.$$

D'où,  $A$  est symétrique, mais  $B$  ne l'est pas.

## 1.2. Rang

Le but de cette section est d'introduire la notion du rang d'une matrice. On commence par les matrices échelonnées et les opérations élémentaires sur les lignes de matrices.

**1.2.1. Définition.** Soit  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  une matrice de lignes  $L_1, \dots, L_m$ . On dit que  $A$  est *échelonnée* si, pour tout  $i = 2, \dots, m$ , la condition suivante est vérifiée:

Si  $L_i$  est non nulle et son premier terme non nul est  $a_{i,j_i}$ , alors  $L_{i-1}$  est non nulle et son premier terme non nul est  $a_{i-1,j_{i-1}}$  avec  $j_{i-1} < j_i$ .

Dans ce cas, le premier terme non nul d'une ligne non nulle de  $A$  s'appelle *pivot* de cette ligne.

**Remarque.** Si  $A$  est échelonnée de type  $m \times n$ , alors chaque ligne, ainsi que chaque colonne, de  $A$  contient au plus un pivot. Par conséquent, le nombre de pivots de  $A$  est plus petit ou égal à  $\min\{m, n\}$ .

**Exemple.** (1) Une matrice-ligne est échelonnée.

(2) Une matrice nulle est échelonnée sans pivots.

(3) La matrice-identité d'ordre  $n$  est échelonnée ayant  $n$  pivots.

(4) Les matrices suivantes sont échelonnées dont les pivots sont encadrés.

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$



**1.2.2. Définition.** Les opérations *élémentaires* sur les lignes d'une matrice sont les opérations suivantes:

Type 1: Échanger deux lignes, notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ , où  $i \neq j$ .

Type 2: Additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne, notée  $L_i + aL_j$ , où  $i \neq j$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

Type 3: Multiplier une ligne par un nombre non nul, notée  $aL_i$ , où  $a \neq 0$ .

En outre, on dit qu'une matrice  $A$  se réduit à une autre matrice  $B$  si cette dernière est obtenue à partir de  $A$  par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

**1.2.3. Lemme.** Toute opération élémentaire  $T$  sur les lignes d'une matrice est inversible. Plus précisément,

- (1) Si  $T$  est  $L_i \leftrightarrow L_j$ , alors  $T^{-1}$  est  $L_i \leftrightarrow L_j$ ;
- (2) Si  $T$  est  $L_i + aL_j$  avec  $i \neq j$ , alors  $T^{-1}$  est  $L_i - aL_j$ ;
- (3) Si  $T$  est  $aL_i$  avec  $a \neq 0$ , alors  $T^{-1}$  est  $a^{-1}L_i$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 15 & 18 & 21 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

**1.2.4. Corollaire.** Soient  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Si  $A$  se réduit à  $B$ , alors

- (1)  $B$  se réduit à  $A$ ;
- (2)  $A = 0_{m \times n}$  si, et seulement si,  $B = 0_{m \times n}$ .

On a maintenant le résultat fondamental suivant.

**1.2.5. Théorème.** Si  $A$  est une matrice réelle, alors

- (1)  $A$  se réduit toujours à une matrice échelonnée, appelée une *forme échelonnée* de  $A$ ;
- (2) les forme échelonnées de  $A$  ont le même nombre de pivots; ce nombre commun s'appelle *rang* de  $A$ , noté  $\text{rg}(A)$ .

**Remarque.** Une matrice échelonnée est une forme échelonnée d'elle-même, dont le rang est le nombre de pivots.

**Exemple.**  $\text{rg}(0_{m \times n}) = 0$  et  $\text{rg}(I_n) = n$ .

**Exercice.** Trouver le rang de la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On effectue des réductions suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où,  $\text{rg}(A) = 2$ .

Le résultat suivant rassemble des propriétés élémentaires du rang d'une matrice.

**1.2.6. Lemme.** Soit  $A$  une matrice de type  $m \times n$ .

- (1)  $\text{rg}(A) \leq \min \{m, n\}$ .
- (2) Si  $A$  se réduit à  $B$ , alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .
- (3)  $\text{rg}(A) = 0$  si, et seulement si,  $A = 0_{m \times n}$ .
- (4)  $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$ .

**Exemple.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\text{rg}(A) = 3$ .

### 1.3. Matrices inversibles

On sait que tout nombre réel non nul  $a$  admet un inverse  $a^{-1}$  tel que  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ . D'une façon analogue, on définira la notion d'inverse de certaines matrices carrées.

**1.3.1. Définition.** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite *inversible* s'il existe une matrice  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

Dans ce cas,  $B$  s'appelle l'*inverse* de  $A$ , et notée  $B = A^{-1}$ .

**Exemple.** Une matrice identité  $I_n$  est inversible avec  $I_n^{-1} = I_n$ .

**Exercice.** Vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

mais que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est non inversible.

**Solution.** (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Pour tous  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rassemble des propriétés de matrices inversibles dans le résultat suivant.

**1.3.2. Lemme.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible.

- (1)  $A^{-1}$  est inversible avec  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- (2)  $A^T$  est inversible avec  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- (3) Si  $AB = C$ , alors  $B = A^{-1}C$ .
- (4) Si  $BA = C$ , alors  $B = CA^{-1}$ .
- (5) Si  $B \in M_n(\mathbb{R})$  est inversible, alors  $AB$  est inversible avec

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Le résultat suivant est un critère pour une matrice carrée soit inversible.

**1.3.3. Théorème.** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , alors  $A$  est inversible si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = n$ .

**Exercice.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Laquelle de  $A, B$  est inversible ?

**Solution.** D'abord, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où,  $\text{rg}(A) = 2$ . D'après le théorème 1.3.3,  $A$  n'est pas inversible. Ensuite, on a

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{rg}(B^T) = 3$ , d'après le théorème 1.3.3,  $B^T$  est inversible, et d'après le lemme 1.3.2(2),  $B$  l'est aussi.

On étudiera comment trouver l'inverse d'une matrice inversible. Pour ce faire, on introduira les notions suivantes.

**1.3.4. Définition.** Une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  est dite

- (1) *triangulaire supérieure* si  $a_{ij} = 0$ , pour tous  $1 \leq j < i \leq n$ ;
- (2) *triangulaire inférieure* si  $a_{ij} = 0$ , pour tous  $1 \leq i < j \leq n$ ;
- (3) *triangulaire* si  $A$  est triangulaire supérieure ou inférieure.

**Remarque.** Une matrice est diagonale si, et seulement si, elle est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

**Exemple.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que  $A$  est triangulaire inférieure et  $B$  est triangulaire supérieure.

**1.3.5. Proposition.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  dont  $A'$  est une forme échelonnée. Si  $\text{rg}(A) = n$ , alors

- (1)  $A'$  est triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont tous non nuls;
- (2) on peut échelonner  $A'$  à  $I_n$  en éliminant les termes au-dessus des pivots à partir du dernier pivot.

**Exercice.** Réduire la matrice échelonnée suivante à  $I_3$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Solution.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.3.6. Théorème.** Soient  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ .

(1) Si  $(A | B)$  s'échelonne à  $(I_n | C)$ , alors  $A$  est inversible et  $C = A^{-1}B$ .

(2) Si  $(A | I_n)$  s'échelonne à  $(I_n | C)$ , alors  $A$  est inversible et  $C = A^{-1}$ .

**Exercice.** En sachant que  $A$  est inversible, calculer  $A^{-1}B$  et  $A^{-1}$  où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On doit échelonner  $(A | B)$  et  $(A | I_2)$ . Pour ce faire, on peut échelonner une matrice  $(A | B | I_2)$  comme suit:

$$\begin{aligned} (A | B | I_2) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 2 & & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2-3L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 2 & & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & & -5 & -7 & -12 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 2 & & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{L_1-2L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 0 & & -3 & -4 & -8 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Alors  $(A | B)$  et  $(A | I_2)$  s'échelonnent respectivement aux matrices suivantes:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 \end{array} \right) \text{ et } \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & & -2 & 1 \\ 0 & 1 & & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

D'où,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -8 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on considère les puissances d'une matrice carrée.

**1.3.7. Définition.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $r > 0$ , on définit

$$A^r = \overbrace{AA \cdots A}^{r \text{ fois}}.$$

En outre, si  $A$  est non nul, on pose  $A^0 = I_n$ ; et si  $A$  est inversible, on définit alors

$$A^{-r} = (A^{-1})^r, \text{ pour tout } r > 0.$$

**Remarque.** (1) Pour tous  $r, s > 0$ , on a  $A^r A^s = A^{r+s}$  et  $(A^r)^s = A^{rs}$ .

(2) Si  $A$  est inversible, alors  $A^r A^s = A^{r+s}$  et  $(A^r)^s = A^{rs}$ , pour tous  $r, s \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice.** Vérifier que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-3}$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-3} = (A^{-1})^3$ . Donc, on doit échelonner  $(A \mid I_2)$ . D'abord,  $(A \mid I_2)$  s'échelonne à la matrice suivante:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right) := (C \mid D).$$

Ensuite,  $(C \mid D)$  s'échelonne à la matrice suivante

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

D'après le théorème 1.3.6(2), on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

Ainsi

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-3} = A^{-2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -191 & 74 \\ 111 & -43 \end{pmatrix}.$$

On conclut cette section par la décomposition LU de matrice, qui sera utile pour la résolution de systèmes d'équations linéaires.

**1.3.8. Définition.** Une opération élémentaire  $T$  sur les lignes d'une matrice s'appelle *opération triangulaire inférieure* si

- (1)  $T$  est de type  $L_i + aL_j$  avec  $i > j$ ; ou bien
- (2)  $T$  est de type  $aL_i$  avec  $a \neq 0$ .

Voici des propriétés d'opérations triangulaires inférieures.

**1.3.9. Lemme.** (1) L'inverse d'une opération triangulaire inférieure est triangulaire inférieure.

- (2) Les opérations triangulaires inférieures préservent les matrices triangulaires inférieures.

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.3.10. Théorème.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  admettant une réduction

$$A \xrightarrow{T_1} A_1 \xrightarrow{T_2} A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{r-1} \xrightarrow{T_r} U,$$

où les  $T_i$  sont des opérations triangulaires inférieures et  $U$  est une matrice triangulaire supérieure. Si l'on effectue les opérations  $T_i^{-1}$  à partir de  $I_n$  comme suit:

$$I_n \xrightarrow{T_r^{-1}} L_1 \xrightarrow{T_{r-1}^{-1}} L_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{r-1} \xrightarrow{T_1^{-1}} L,$$

alors  $L$  est triangulaire inférieure telle que

$$A = LU,$$

appelée une *décomposition LU* de  $A$ .

**Remarque.** Ce n'est pas vrai que toute matrice admet une décomposition LU.

**Exercice.** Donner une décomposition LU de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On échelonne  $A$  par des opérations triangulaires inférieures comme suit:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À partir de  $I_3$ , on inverse les opérations ci-dessus comme suit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a une décomposition LU pour  $A$  comme suit:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.4. Exercices

1. Calculer le produit suivant:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}.$$

2. Donner, à l'aide de les propositions 1.1.8 et 1.1.9, la troisième colonne du produit  $AB$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

3. Calculer, l'aide des propositions 1.1.8 et 1.1.9, les produits matriciels suivants.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & \sqrt{11} & 3 & 1 \\ 0 & 4 & \sqrt{5} & 5 & 0 & 3 \\ \sqrt{7} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & \sqrt{11} & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer, à l'aide de la proposition 1.1.11, les produits suivants de matrices rationnelles:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 9 & 3 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer, à l'aide de la proposition 1.1.11, le produit suivant de matrices réelles:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$



6. Considérer deux matrices symétriques suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver la condition pour que  $AB$  soit symétrique.

7. Calculer  $A^T A$  et  $AA^T$ , où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $A^T A$  et  $AA^T$  sont symétriques.

9. Montrer, pour toute matrice  $A$ , que  $AA^T$  et  $A^T A$  sont symétriques.

10. Dans chacun des cas suivants, trouver le rang de chacun des matrices suivantes:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Trouver, si possible, l'inverse de chacune des matrices suivantes.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 7 & 3 & 10 & -15 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. En sachant que  $A$  est inversible, trouver  $A^{-1}B$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Dans chacun des cas suivants, calculer  $A^{-3}$ .

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

14. Trouver une décomposition LU de chacune des matrices suivantes:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

## Chapitre II: Déterminants

À chaque matrice carrée, on associe un nombre, appelé son *déterminant*. Ceci sera appliqué pour déterminer si une matrice carrée est inversible ou non et pour calculer les valeurs propres d'une matrice carrée. En géométrie, on utilise le déterminant pour calculer l'aire d'un parallélogramme et le volume d'un parallélépipède.

**2.1. Définition.** Soit  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$ . Le *déterminant* de  $A$ , noté  $\det(A)$  ou  $|A|$ , est un nombre réel défini par récurrence comme suit.

Si  $n = 1$ , on définit alors  $\det(a_{11}) = a_{11}$ .

Supposons que  $n > 1$  et que le déterminant de toute matrice carrée d'ordre  $n - 1$  est défini.

Pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , désignons par  $M_{ij}$  la sousmatrice carrée de  $A$  d'ordre  $n - 1$  obtenue en supprimant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne. Par l'hypothèse de récurrence,  $m_{ij} = \det(M_{ij})$  est défini, appelé *mineur* de  $A$  d'indices  $i, j$ .

(1) Si l'on développe suivant la  $i$ -ième ligne de  $A$ , alors

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}m_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}m_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}m_{in}.$$

(2) Si l'on développe suivant la  $j$ -ième colonne de  $A$ , alors

$$\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}m_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}m_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}m_{nj}.$$

Le calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 est évident.

**2.2. Proposition.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**Exercice.** Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Solution.** (1) D'après la proposition 2.2, on a

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2(2 + \sqrt{2}) - (-3)\sqrt{2} = 4 + 5\sqrt{2}.$$

(2) On développe ce déterminant selon la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ = (-3)(1 - 9) - 2(6 - 4) = 20.$$

On étudiera comment calculer le déterminant d'une matrice de grande taille. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition.

**2.3. Proposition.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  de lignes  $L_1, \dots, L_n$  et de colonnes  $C_1, \dots, C_n$ .

(1) Si  $C_j = aC'$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $C'$  une matrice-colonne, pour un certain  $1 \leq j \leq n$ , alors

$$\det(A) = a \cdot \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C', C_{j+1}, \dots, C_n).$$

(2) Si  $L_i = aL'$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $L'$  une matrice-ligne, pour un certain  $1 \leq i \leq n$ , alors

$$\det(A) = a \cdot \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

(3) En particulier, si  $A$  a une ligne nulle ou une colonne nulle, alors  $\det(A) = 0$ .

**Exemple.**

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 5 & 2 \cdot 7 \end{vmatrix}; \quad 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot 7 \end{vmatrix}.$$

**Exercice.** Calculer

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

**Solution.** D'après la proposition 2.3(1), on a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{30}}.$$

On étudiera comment calculer le déterminant d'une matrice carrée de grande taille. Le premier résultat est de réduire la taille de certaines matrices spéciales.

**2.4. Proposition.** Si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées, alors

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}.$$

**Exercice.** Calculer

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}$$

**Solution.** D'après la proposition 2.4, on a

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = (6 - 5)5(5 - 3) = 10.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.

**2.5. Proposition.** Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

**Exemple.** (1)  $\det(I_n) = 1$ .

(2)

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 34 & 95 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \sqrt{3}\sqrt{5}(-3)(-1) = 3\sqrt{15}.$$

Comme toute matrice carrée se réduit à une matrice triangulaire supérieure, le résultat suivant nous permet de calculer le déterminant d'une matrice carrée générale.

**2.6. Théorème.** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

(1) Si  $B$  est obtenue en échangeant deux lignes (respectivement, deux colonnes) de  $A$ , alors  $\det(A) = -\det(B)$ .

(2) Si  $B$  est obtenue en additionnant un multiple d'une ligne (respectivement, colonne) de  $A$  à une autre ligne (respectivement, colonne) de  $A$ , alors  $\det(A) = \det(B)$ .

(3) Si  $B$  est obtenue en multipliant une ligne (respectivement, colonne) de  $A$  par un nombre non nul  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $\det(A) = a^{-1} \cdot \det(B)$ .

**Exercice.** Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Solution.** En vue du théorème 2.6, on effectue des opérations élémentaires comme suit:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+3L_1}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 10 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_3-L_2 \\ L_4-L_2}}{=} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-5) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{L_4-L_3}{=} 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 25.$$

Le résultat suivant rassemble des propriétés importants de déterminant de matrices.

**2.7. Théorème.** Si  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , alors

- (1)  $\det(A) = \det(A^T)$ ;
- (2)  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
- (3)  $\det(A^r) = (\det(A))^r$ , pour tout entier  $r \geq 1$ .

**Exercice.** À l'aide de la décomposition LU, calculer le déterminant suivant:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On a trouvé une décomposition LU suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 2.7(2), on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0.$$

Le résultat suivant est très pratique pour déterminer si une matrice est inversible ou non.

**2.8. Théorème.** Une matrice carrée  $A$  est inversible si, et seulement si,  $\det(A) \neq 0$ ; et dans ce cas, pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\det(A^r) = (\det(A))^r.$$

**Exercice.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $A$  est inversible et calculer  $\det(A^{-3})$ .

**Solution.** On a vu que  $\det(A) = 25$ . D'après le théorème 2.8,  $A$  est inversible et

$$\det(A^{-3}) = (\det(A))^{-3} = 25^{-3} = \frac{1}{15625}.$$

## 2.10. Exercices

1. Calculer les déterminants suivants.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 + \sqrt{2} & 5 & 0 \\ -6 & 0 & 1 + \sqrt{3} \\ 0 & 4 + \sqrt{2} & 5 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer, à l'aide de la proposition 2.3, le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

3. Trouver premièrement une décomposition LU de  $A$ , et en calculer  $\det(A)$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{7} & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & \sqrt{11} & \sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{13} & \sqrt{11} & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant de la matrice donnée et donner les valeurs réelles de  $a$  pour que la matrice soit inversible.

$$(1) \begin{pmatrix} a+1 & 3 & 4 \\ a & 2 & 2 \\ 4 & 3 & a \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & a & a \\ 1 & 3 & a & 5 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant de  $A$ ; déterminer si  $A$  est inversible ou non; et si oui, trouver  $\det(A^{-2})$  lorsque  $A$  est inversible.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 9 & 3 & -3 & 15 \\ 6 & 7 & -8 & 10 \\ -3 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(1) Pour toute valeur réelle de  $a$ , montrer que  $A$  est inversible. *Indice:* Calculer  $AA^T$  et appliquer le théorème 2.7.

(2) Calculer  $\det(A^{-2})$ .



### Chapitre III: Systèmes d'équations linéaires

La résolution de systèmes d'équations linéaires apparaît dans beaucoup de domaines, comme en traitement numérique du signal, en optimisation linéaire et en analyse numérique. Dans ce cours, cela sera utilisée pour exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de certains vecteurs, en particulier, pour trouver les coordonnées de vecteurs dans une base. Le but de ce chapitre est d'étudier les propriétés et la résolution de tels systèmes.

**3.1. Définition.** Un système d'équations linéaires sur  $\mathbb{R}$  est un ensemble d'équations linéaires comme suit:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}. \end{array}$$

On appelle  $x_1, x_2, \dots, x_n$  *inconnues*;  $a_{ij}$  *coefficients*; et  $b_i$ , *termes constants*.

Une solution de ce système est un  $n$ -uplet  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in \mathbb{R}$ , tel que

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Le système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution; et sinon, *incompatible*.

Deux systèmes d'équations linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

**Exemple.** (1) On a un système d'une équation linéaire

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8,$$

dont  $(4, 0, 0, 0)$  est une solution.

(2) Considérons trois plans affines de l'espace définis par les équations

$$x + y - z = 1; \quad 2x + y - z = 1; \quad 3x + 2y - z = 2,$$

respectivement. Les points d'intersection de ces plans sont donnés par les solutions du système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{cccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 2. \end{array}$$

On verra que ce système a une seule solution  $(0, 1, 0)$ . Ainsi, ces trois plans affines se rencontrent en un seul point  $(0, 1, 0)$ .

(3) Le système suivant n'est pas linéaire:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + xy &= 2. \end{aligned}$$

On utilisera la théorie des matrices pour étudier les systèmes d'équations linéaires. Pour ce faire, on introduira la notion suivante.

**3.2. Définition.** Soit un système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (*)$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

s'appellent *matrice des coefficients*; et la matrice

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

s'appelle *matrice augmentée*. Le système (\*) est équivalent à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (**)$$

de sorte que  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  est une solution du système (\*) si, et seulement si, la colonne

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation matricielle (\*\*).

**Exemple.** (1) Considérons le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{rcl} 2x & - & z = 1 \\ x - 2y & & = 1 \\ 2x & - & 2z = 5. \end{array}$$

La matrice des coefficients et la matrice augmentée sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right).$$

En outre, le système original est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2) Réciproquement, la matrice partagée

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

représente l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou bien, le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ 2y + z & = & 3 \\ 2z & = & 0. \end{array}$$

Dès maintenant, un système de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues sera noté comme une équation matricielle

$$AX = B,$$

où  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ . Le but est résoudre un tel système, c'est-à-dire,

- (1) déterminer si le système est compatible ou incompatible;
- (2) trouver toutes les solutions s'il est compatible.

On commence par la résolution de certains systèmes assez simples, c'est-à-dire, les systèmes échelonnés tels que définis ci-dessous.

**3.3. Définition.** Un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues

$$AX = B$$

est dit *échelonné* si  $(A \mid B)$  est échelonnée. Dans ce cas,  $A$  est aussi échelonnée avec  $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A \mid B) \leq n$ ; et en outre,

- (1) une inconnue est dite *libre* si aucun de ses coefficients n'est un pivot de  $A$ ;
- (2) le nombre d'inconnues libres est égal à  $n - \text{rg}(A)$ .

**Exemple.** (1) Le système

$$\begin{array}{rcccccc} \boxed{2x_1} & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & \boxed{5x_3} & + & x_4 & + & 5x_5 & = & -1 \\ & & & & & & \boxed{7x_4} & & & = & -8 \end{array}$$

est échelonné. En effet, la matrice augmentée

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 0 & -8 \end{array} \right)$$

est échelonnée. Les pivots de la matrice des coefficients sont 2, 5 et 7 qui sont coefficients de  $x_1, x_3$  et  $x_4$  respectivement. Donc les inconnues libres sont  $x_2$  et  $x_5$ .

(2) Le système

$$0x_1 + \boxed{3x_2} - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 1$$

est échelonné, dont les inconnues libres sont  $x_1, x_3, x_4$  et  $x_5$ .

(3) Le système

$$\begin{array}{rcccccc} \boxed{x} & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & \boxed{5y} & - & 5z & = & -15 \\ & & & & \boxed{-2z} & = & -4 \end{array}$$

est échelonné sans inconnue libre.

(4) Les systèmes suivants ne sont pas échelonnés.

$$\begin{array}{rcccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 3; \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ 2x & & & + & z & = & 3. \end{array}$$

On étudiera la résolution de systèmes échelonnés d'équations linéaires.

**3.4. Proposition.** Soit  $AX = B$  un système échelonné d'équations linéaires. Si  $\text{rg}(A) < \text{rg}(A \mid B)$ , alors le système est incompatible.

**Exemple.** Considérons le système échelonné suivant:

$$\begin{aligned}2x - y - 2z &= 1 \\2y - 3z &= 0 \\0z &= 2 \\0z &= 0.\end{aligned}$$

La matrice augmentée est

$$(A | B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Comme  $\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{rg}(A | B)$ , d'après la proposition 3.4, le système est incompatible.

**3.5. Proposition.** Soit  $AX = B$  un système échelonné d'équations linéaires à  $n$  inconnues. Si  $\text{rg}(A) = n$ , alors le système admet une seule solution, ce qui peut être trouvée par substitution successivement à partir de la dernière équation non nulle.

**Exercice.** Résoudre le système échelonné suivant:

$$\begin{aligned}2x - y + z &= 1 \\y - z &= 3 \\3z &= 6 \\0z &= 0.\end{aligned}$$

**Solution.** La matrice augmentée est

$$(A | B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Comme  $\text{rg}(A) = 3$ , d'après la proposition 3.5, le système a une seule solution. D'après la troisième équation, on trouve  $z = 2$ . En substituant  $z = 2$  dans la deuxième équation, on trouve  $y = 5$ . Enfin, en substituant  $y = 5$  et  $z = 2$  dans la première équation, on trouve  $x = 2$ . Donc la solution du système est  $(2, 5, 2)$ .

**3.6. Théorème.** Soit un système échelonné d'équations linéaires à  $n$  inconnues

$$AX = B.$$

Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | B) < n$ , alors

- (1) le système a des inconnues libres  $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}$  avec  $s = n - \text{rg}(A)$ ;

(2) le système a une infinité de solutions qui sont en bijection avec les  $s$ -uplets  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ , de la façon suivante :

Étant donné  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ , on pose  $x_{j_l} = \lambda_l$ ,  $l = 1, \dots, s$ . En déplaçant les  $a_{i,j_l} \lambda_j$  à droite, on obtient un système échelonné sans inconnues libres. En résolvant ce dernier par substitution, on trouve les valeurs pour les inconnues non libres. Cela donne la solution du système original correspondant à  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ .

**Exercice.** Résoudre le système échelonné suivant:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_3 + x_4 + 5x_5 &= -1 \\ 7x_4 &= -8. \end{aligned}$$

**Solution.** Le système est échelonné ayant deux inconnues libres  $x_2$  et  $x_5$ . Ainsi le système admet une infinité de solutions. À titre d'exemple, on considère un couple  $(1, -1)$ . Posant  $x_2 = 1$  et  $x_5 = -1$ , on obtient un système échelonné sans inconnues libres suivant:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 7x_4 &= -8. \end{aligned}$$

En résolvant la dernière système par substitution, on trouve une solution

$$\left( \frac{46}{70}, 1, \frac{36}{35}, -\frac{8}{7}, -1 \right)$$

du système original correspondant à  $(1, -1)$ . Pour trouver toutes les solutions, on donne  $x_2 = \lambda$  et  $x_5 = \mu$  des valeurs réelles arbitraires. Ceci donne un système échelonné sans inconnues libres comme suit:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 + 2x_4 &= -\lambda + \mu \\ 5x_3 + x_4 &= -5\mu - 1 \\ 7x_4 &= -8. \end{aligned}$$

En résolvant par substitution, on trouve

$$x_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{81}{70}, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = -\mu + \frac{1}{35}, \quad x_4 = -\frac{8}{7}, \quad x_5 = \mu.$$

Donc l'ensemble des solutions du système original est

$$\left\{ \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{81}{70}, \lambda, -\mu + \frac{1}{35}, -\frac{8}{7}, \mu \right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

La stratégie de la résolution d'un système général consiste à réduire le système à un autre système plus simple sans changer l'ensemble des solutions.

**3.7. Théorème.** L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires n'est pas changé par les *opérations élémentaires* suivantes:

Type 1: Échanger deux équations, notée  $E_i \leftrightarrow E_j$ .

Type 2: Additionner à une équation un multiple d'une autre équation, notée  $E_i + aE_j$ .

Type 3: Multiplier une équation par un nombre non nul  $a$ , notée  $aE_i$ .

**Remarque.** Effectuer une opération élémentaire sur les équations d'un système est équivalent à effectuer une opération élémentaire de même type sur les lignes de la matrice augmentée.

**Exemple.**

$$\begin{array}{lcl} x + 2y + 3z = 0 & \xrightarrow{E_2 - 4E_1} & x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 1 & \xrightarrow{E_3 - 7E_1} & -3y - 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 2 & & -6y - 12 = 2 \end{array} \quad \xrightarrow{E_3 - 2E_2} \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ -3y - 6z = 1 \\ 0z = 0. \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 - 4L_1 \\ L_3 - 7L_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & -6 & 12 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 2L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

On voit que la nouvelle matrice augmentée est la matrice augmentée du nouveau système.

**3.8. Corollaire.** Soit  $AX = B$  un système d'équations linéaires. Si  $(A | B)$  s'échelonne à une matrice échelonnée  $(A' | B')$ , alors le système original est équivalent au système échelonné  $A'X = B'$ .

**Remarque.** La méthode donnée dans le corollaire 3.8 s'appelle *élimination de Gauss*.

**Exercice.** Résoudre, par l'élimination de Gauss, le système

$$\begin{array}{rclcl} & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & & & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 9. \end{array}$$

**Solution.** On échelonne la matrice augmentée comme suit:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 12 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 + \frac{1}{4}L_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 12 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \\ L_4 - 3L_1 \end{array}}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{5}E_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3+4L_2 \\ L_4+9L_2}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Cette dernière représente le système échelonné suivant:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 0x_4 &= 0 \\ 0x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que  $x_3$  et  $x_4$  sont les inconnues libres. On donne  $x_3 = \lambda$  et  $x_4 = \mu$  des valeurs réelles arbitraires et on obtient le système échelonné suivant:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 + \lambda - 2\mu \\ x_2 &= \lambda - \mu. \end{aligned}$$

En résolvant par substitution, on trouve que

$$x_1 = 3 - \lambda, \quad x_2 = \lambda - \mu, \quad x_3 = \lambda, \quad x_4 = \mu.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions du système original est

$$\{(3 - \lambda, \lambda - \mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Le résultat suivant découle des propositions 3.4, 3.5, 3.6 et le corollaire 3.8.

**3.9. Théorème.** Soit  $AX = B$  un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues.

(1) Si  $\text{rg}(A) < \text{rg}(A \mid B)$ , alors le système n'a aucune solution.

(2) Si  $\text{rg}(A) = n$ , alors le système admet une seule solution.

(3) Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid B) < n$ , alors le système admet une infinité de solutions.

Pour résumer, le système est compatible si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid B)$ .

**Exercice.** Considérer le système suivant:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= a \\ x + 2y + 2z &= a \\ x + ay + z &= 3. \end{aligned}$$

Déterminer les valeurs de  $a$  pour que le système

(1) ait une seule solution;

(2) ait une infinité de solutions;

(3) n'ait pas de solution.



**Solution.** On échelonne la matrice augmentée  $(A | B)$  comme suit:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 1 & 2 & 2 & a \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -2 & 3-a \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - (a-1)L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 3-a \end{array} \right).$$

Pour toutes valeurs de  $a$ , cette dernière est échelonnée.

(1) Si  $a \neq 3$ , alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | B) = 3$ , et d'après le théorème 3.9, le système admet une seule solution.

(2) Si  $a = 3$ , alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | B) = 2 < 3$ , et d'après le théorème 3.9, le système admet une infinité de solutions.

(3) Il n'y a aucune valeur réelle de  $a$  pour que le système soit incompatible.

On conclut cette section par étudier des systèmes d'équations linéaires dont les termes constants sont tous nuls.

**3.10. Définition.** Un système d'équations linéaires

$$AX = B$$

est dit *homogène* si  $B = 0$ . Dans ce cas,  $X = 0$  est une solution, appelée la *solution nulle*.

On verra plus tard que les systèmes homogènes seront utilisés pour déterminer si des vecteurs sont linéairement dépendants ou indépendants.

**3.11. Théorème.** Soit un système homogène de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues

$$AX = 0.$$

(1) Le système admet des solutions non nulles si, et seulement si,  $\text{rg}(A) < n$ .

(2) Si  $m < n$ , alors le système admet des solutions non nulles.

**Exemple.** Considérons le système homogène suivant:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x - (1 + \sqrt{3})y - z &= 0 \\ (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{3}y + z &= 0. \end{aligned}$$

Comme le nombre d'équations est inférieur que le nombre d'inconnues, d'après le théorème 3.11(2), ce système homogène admet des solutions non nulles.

**Exercice.** Donner la valeur de  $a$  pour que le système homogène suivant ait des solutions non nulles.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 2x + 4y + az &= 0. \end{aligned}$$

**Solution.** Comme le système est homogène, on échelonne la matrice des coefficients

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est échelonnée pour toute valeur de  $a$ . D'après le théorème 3.11(1), le système homogène admet des solutions non nulles si, et seulement si,  $\text{rg}(A) < 3$ , si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = 2$ , si, et seulement si,  $a = 2$ .

### 3.12. Exercices

1. Résoudre par l'élimination de Gauss les systèmes suivants:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

2. Trouver le point d'intersection de trois plans affines définis par les équations  $x+2y-z=1$ , et  $2x-y+z=2$ , et  $3x+2y-z=3$ , respectivement.

3. Considérer le système suivant:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + ay + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Déterminer les valeurs réelles de  $a$  pour lesquelles le système

- (1) n'ait pas de solution;
- (2) ait une infinité de solutions;
- (3) ait une seule solution.

4. Dans chacun des cas suivants, trouver la condition pour que le système soit compatible.

$$(1) \quad \begin{aligned} x - 2y + z &= 6 \\ 3x + y - z &= 7 \\ -x + y + az &= 6. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c. \end{aligned}$$

5. Soient  $P_1, P_2$ , et  $P_3$  les plans affines définis par les équations  $x+2y+z = 1$ ;  $2x+5y+az = 1$  et  $x + ay + 2z = 2$ , respectivement. Trouver les valeurs réelles de  $a$  pour que les trois plans se coupent, c'est-à-dire, leur intersection est non vide.
6. Pour quelle valeur de  $a$ , le système homogène

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x - 4y + z &= 0 \\ 3x + y + az &= 0 \\ -x - 2y - z &= 0, \end{aligned}$$

a-t-il des solutions non nulles? Si c'est le cas, trouver toutes les solutions.

7. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le système homogène admet des solutions non nulles.

$$(1) \quad \begin{aligned} 2x - y + 4z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 3x + y &= 0; \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 3x + 3z &= 0; \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

## Chapitre IV: Espaces vectoriels

Dans les applications, beaucoup de quantités comme la chaleur et la température, peuvent être décrites par une seule variable. Mais certains d'autres quantités, comme la force et la couleur numérique, exigent plusieurs variables pour leur définition. On les appelle *quantités vectorielles*. Les quantités vectorielles différentes possèdent des propriétés communes. Par exemple, une quantité vectorielle peut être multipliée par un constant et deux quantités vectorielles de même genre peuvent être additionnées. Afin d'étudier les quantités vectorielles diverses en même temps, on introduit la notion d'espace vectoriel et on étudie celle-ci en général; en suite, on applique des résultats généraux dans des applications particulières.

### 4.1. Base et dimension

**4.1.1. Définition.** Les nombres réels s'appellent *scalaires*. Un ensemble  $E$ , ses éléments s'appellent *vecteurs*, est dit *espace vectoriel réel* (ou bien, *espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$* ) s'il est muni d'une multiplication par scalaires

$$\cdot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E : (a, u) \mapsto a \cdot u$$

et d'une addition

$$+ : E \times E \rightarrow E : (u, v) \mapsto u + v$$

satisfaisant aux axiomes suivants pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $u, v, w \in E$ .

- (1) (associativité)  $a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$ ;
- (2) (neutralité)  $1 \cdot u = u$ ;
- (3) (commutativité)  $u + v = v + u$ ;
- (4) (associativité)  $u + (v + w) = (u + v) + w$ ;
- (5)  $E$  a un *vecteur nul*, noté  $0_E$ , tel que  $u + 0_E = u$ ;
- (6)  $u$  admet un *opposé*, noté  $(-u)$ , tel que  $u + (-u) = 0_E$ ;
- (7) (distributivité)  $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ ;
- (8) (distributivité)  $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ .

**Remarque.** (1) Pour tous  $u, v \in E$ , on définit la *différence* entre  $u$  et  $v$  par

$$u - v = u + (-v).$$

(2) Pour tous  $u_1, \dots, u_n \in E$  avec  $n > 2$ , on définit

$$u_1 + \dots + u_n = (\dots (u_1 + u_2) + \dots + u_{n-1}) + u_n.$$

(3) On dit que  $E$  est dit *nul* si  $E = \{0_E\}$ .

**Exemple.**  $E = \{0\}$  est un espace vectoriel réel nul, pour les opérations suivantes:

$$0 + 0 = 0, \quad a \cdot 0 = 0, \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

**4.1.2. Proposition.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a un espace vectoriel réel

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

dont les opérations sont définies ci-dessous:

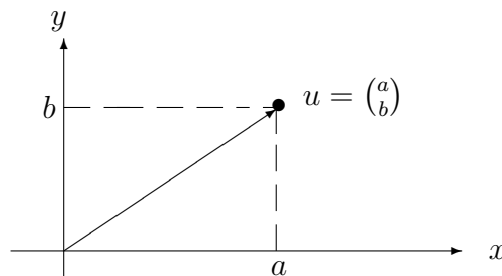
$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

**Exemple.** (1) Prenant  $n = 1$ , on voit que  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , noté  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ .

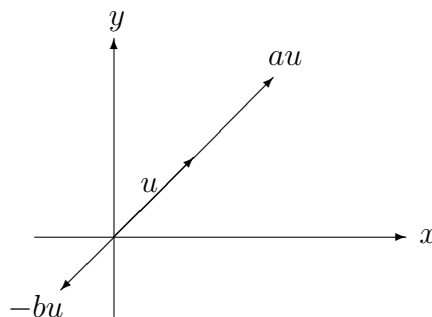
(2) Prenant  $n = 2$ , on obtient le plan réel  $\mathbb{R}^2$ . En effet, un vecteur de la forme algébrique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

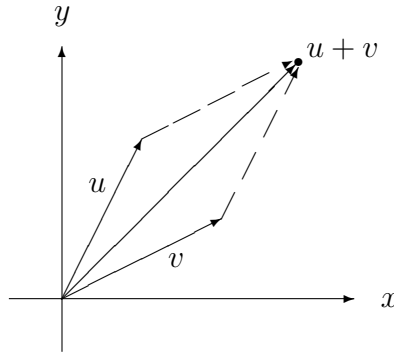
peut être représenté par un vecteur géométrique du plan comme suit:



On peut multiplier un vecteur par un scalaire d'une façon géométrique comme suit:



On peut aussi additionner deux vecteurs d'une façon géométrique comme suit:



(3) Prenant  $n = 3$ , on obtient l'espace vectoriel réel usuel

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ceci admet aussi une réalisation géométrique dans l'espace usuel de dimension 3.

(4) Une couleur numérique  $C$  dont les coordonnées RVB sont  $\{r; v; b\}$  est représentée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Dès maintenant, on se fixe  $E$  un espace vectoriel réel. D'abord, on rassemble des propriétés élémentaires d'espaces vectoriels dans le résultat suivant.

**4.1.3. Proposition.** Les énoncés suivants sont valides pour tous  $u, v, w \in E$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (1) Si  $u + v = u + w$ , alors  $v = w$ .
- (2)  $au = 0_E$  si, et seulement si,  $a = 0$  ou  $u = 0_E$ .
- (3)  $(-1)u = -u$  et  $-(-u) = u$ .
- (4)  $-(u + v) = -u - v$ .
- (5)  $u + v = w$  si, et seulement si,  $u = w - v$ .

La notion de combinaison linéaire joue un rôle important dans l'étude d'espaces vectoriels.

**4.1.4. Définition.** Soient  $u_1, \dots, u_n \in E$ . Un vecteur  $u \in E$  est dit *combinaison linéaire* de  $u_1, \dots, u_n$  s'il existe  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , appelés *coefficients*, tels que

$$u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n.$$

**Remarque.** Lorsque  $n = 1$ , une combinaison linéaire de  $u_1$  est un *multiple*  $au_1$  de  $u_1$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exemple.** (1) Tout vecteur  $v \in E$  est une combinaison linéaire de  $v$ , car  $v = 1 \cdot v$ .

(2) Le vecteur nul  $0_E$  est une combinaison linéaire de toute famille de vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  de  $E$ . En effet,

$$0_E = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_n.$$

**Exercice.** Soient des vecteurs

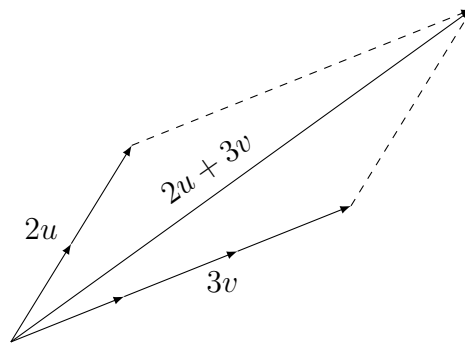
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Donner la combinaison linéaire  $w$  de  $u, v$  à coefficients 2, 3.

**Solution.** Par définition,

$$w = 2u + 3v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ceci est illustré par



On parlera d'une application des combinaisons linéaires aux couleurs numériques.

**4.1.5. Proposition.** Une couleur numérique  $C$  est obtenue en mélangeant des couleurs numériques  $C_1, \dots, C_n$  si, et seulement si,  $C$  est une combinaison linéaire de  $C_1, \dots, C_n$  à coefficients entre 0 et 1, c'est-à-dire,

$$C = a_1 C_1 + \dots + a_n C_n; \quad 0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1,$$

où  $a_i$  est l'intensité, ou bien le pourcentage, de la couleur numérique  $C_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .

**Exercice.** Trouver les coordonnées RVB de la couleur numérique  $C$  obtenue en mélangeant 30% du magenta, 20% du blanc, 15% du jaune et 35% du pourpre.

**Solution.** Les colonnes des coordonnées RVB du magenta, du blanc, du jaune et du pourpre sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 4.1.5, on obtient

$$C = 0,3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,15 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,35 \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,35 \\ 0,85 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,  $C$  est constituée de 86% du rouge, 35% du vert, et 85% du bleu.

Le résultat suivant nous dit qu'exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de certains vecteurs se ramène à trouver une solution d'un système d'équations linéaires.

**4.1.6. Lemme.** Soient  $u_1, \dots, u_n; u \in \mathbb{R}^m$ . Posons  $A = (u_1 \cdots, u_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Pour tous  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , les énoncés suivants sont équivalents.

(1)  $u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$ .

(2)  $u = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

(3) Le système  $AX = u$  a pour solution

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

**Exercice.** Soient

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Exprimer, si possible,  $u$  comme une combinaison linéaire de  $u_1, u_2, u_3$ .

**Solution.** D'après le lemme 4.1.6, on doit chercher une solution du système

$$(u_1 \ u_2 \ u_3)X = u,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on échelonne la matrice augmentée

$$(u_1 \ u_2 \ u_3 \mid u) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$



Ceci représente le système échenonné

$$\begin{array}{rcl} -x & + & y - z = -4 \\ & & 3y - 2z = -7 \\ & & 0z = 0. \end{array}$$

Comme  $z$  est une inconnue libre, le système admet une infinité de solutions. Pour trouver une solution particulière, en posant  $z = 2$ , on obtient  $y = -1$  et  $x = 1$ . C'est-à-dire,

$$u = 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 2 \cdot u_3.$$

Par contre, si l'on pose  $z = 5$ , alors  $y = 1$  et  $x = 0$ . Ceci nous donne une autre expression

$$u = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3.$$

Le résultat suivant nous un critère pour qu'un vecteur soit une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.

**4.1.7. Théorème.** Si  $u_1, \dots, u_n; u \in \mathbb{R}^m$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1)  $u$  est une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$ .
- (2) Le système d'équations linéaires suivant est compatible

$$(u_1 \cdots u_n)X = u.$$

- (3)  $\text{rg}(u_1 \cdots u_n) = \text{rg}(u_1 \cdots u_n \mid u)$ .

**Exercice.** Déterminer si  $v$  est une combinaison linéaire de  $v_1, v_2$  ou non, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Solution.** D'après le théorème 4.1.7, on doit comparer  $\text{rg}(v_1 \ v_2)$  et  $\text{rg}(v_1 \ v_2 \mid v)$ . Pour ce faire, on échelonne la matrice  $(v_1 \ v_2 \mid v)$  comme suit:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

D'où,  $\text{rg}(v_1 \ v_2) = 2$  et  $\text{rg}(v_1 \ v_2 \mid v) = 3$ . Par conséquent,  $v$  n'est pas une combinaison linéaire de  $v_1, v_2$ .

En général, les coefficients d'une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$  ne sont pas uniques. Par exemple, dans l'espace réel  $\mathbb{R}^3$ , on a vu que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On étudiera quand les coefficients de toute combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$  sont uniques.

**4.1.8. Définition.** Des vecteurs  $u_1, \dots, u_n \in E$  sont dits

(1) *linéairement dépendants* s'il existe  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , non tous nuls, tels que

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0_E;$$

(2) *linéairement indépendants* sinon; c'est-à-dire, si toute égalité

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0_E$$

entraîne que  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

**Remarque.** (1) En bref, on dit qu'une famille  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est *liée* ou *libre* si  $u_1, \dots, u_n$  sont linéairement dépendants ou indépendants, respectivement.

(2) Par convention, la famille vide  $\emptyset$  est libre.

**Exercice.** Soient des vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Vérifier si  $\{u_1, u_2\}$  est liée ou libre.

**Solution.** La question est de déterminer si l'équation

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet une solution non nulle. Cette équation est équivalente au système homogène

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ceci n'a que la solution nulle  $x_1 = x_2 = 0$ . Ainsi  $\{u_1, u_2\}$  est libre.

Le résultat suivant dit que c'est facile de déterminer si une petite famille de vecteurs est liée ou libre.

**4.1.9. Lemme.** Si  $u, v \in E$ , alors

(1)  $\{u\}$  est liée si, et seulement si,  $u = 0_E$ ;

(2)  $\{u, v\}$  est liée si, et seulement si, l'un de  $u, v$  est un multiple de l'autre.

**Exercice.** Déterminer lesquelles des familles de vecteurs  $\mathbb{R}^2$  suivantes sont libres.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Solution.** D'après le lemme 4.1.9(1), la première famille est liée, et la deuxième est libre. Enfin, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on voit que

$$au = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} \neq v; \quad av = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \end{pmatrix} \neq u.$$

D'après le lemme 4.1.9(2),  $\{u, v\}$  est libre.

Le résultat suivant nous dit que déterminer si une famille de vecteurs est liée ou libre se ramène à déterminer si un système homogène d'équations linéaires admet ou non des solutions non nulles.

**4.1.10. Théorème.** Pour tous  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ , les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) La famille  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre.
- (2) Le système homogène suivant n'a que la solution nulle

$$(u_1, \dots, u_n)X = 0.$$

- (3)  $\text{rg}(u_1 \dots u_n) = n$ , le nombre de vecteurs de cette famille.

**Exercice.** Déterminer laquelle des familles de vecteurs suivantes est liée.

$$(1) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

$$(2) u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

**Solution.** D'après le théorème 4.1.10(3), il faut comparer  $\text{rg}(v_1 v_2 v_3)$  et le nombre de vecteurs de cette famille.

- (1) On échelonne

$$(v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{rg}(v_1 v_2 v_3) = 3$ , la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre.

- (2) On échelonne

$$(u_1 u_2 u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{rg}(u_1 \ u_2 \ u_3) = 2 < 3$ , la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est liée.

Le résultat suivant donne une caractérisation de l'indépendance linéaire.

**4.1.11. Proposition.** Si  $u_1, \dots, u_n \in E$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) La famille  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre.
- (2) Toute sous-famille de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre.
- (3) Aucun de  $u_1, \dots, u_n$  n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- (4) Toute combinaison linéaire  $u$  de  $u_1, \dots, u_n$  s'écrit d'une façon unique

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n, \text{ avec } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

**Remarque.** Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre, alors

- (1)  $u_i \neq 0_E$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;
- (2)  $u_i \neq u_j$  lorsque  $i \neq j$ .

**Exemple.** Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

On a vu que

$$u = 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 2 \cdot u_3 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3.$$

D'après la proposition 4.1.11(4), la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est liée.

**Exercice.** Vérifier qu'aucune des trois couleurs parmi le rouge, le vert et le bleu n'est obtenue en mélangeant les deux autres.

**Démonstration.** Les vecteurs des coordonnées RVB de ces couleurs sont respectivement

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $(RVB) = I_3$ , ce qui est de rang 3. D'après le théorème 4.1.10(3),  $\{R, V, B\}$  est libre. D'après la proposition 4.1.11(3), aucun de  $R, V, B$  n'est une combinaison linéaire des deux autres. En particulier, d'après la proposition 4.1.5, aucun de  $R, V, B$  n'est obtenue en mélangeant deux autres.

**4.1.12. Définition.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel.

(1) Si  $E$  est non nul, alors une famille ordonnée  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de vecteurs de  $E$  s'appelle *base* de  $E$  si

- (i)  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre; et
  - (ii) tout vecteur  $u \in E$  est une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$ .
- (2) Si  $E = \{0_E\}$  alors, par convention, la famille vide  $\emptyset$  est la seule base de  $E$ .

**Exercice.** Vérifier que  $\mathbb{R}^2$  a pour base la famille ordonnée suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Démonstration.** D'abord, considérons la matrice

$$A = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

avec  $\text{rg}(A) = 2$ .

(1) D'après le théorème 4.1.10, la famille  $\{u_1, u_2\}$  est libre.

(2) Soit un vecteur quelconque  $u \in \mathbb{R}^2$ . D'après le théorème 3.9(2), le système  $AX = u$  est compatible. D'après le théorème 4.1.7,  $u$  est une combinaison linéaire de  $u_1, u_2$ . Par définition,  $\{u_1, u_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

**4.1.13. Proposition.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^n$  a pour base, appelée *base canonique*, la famille ordonnée suivante:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Démonstration.** Comme  $(e_1 \cdots e_n) = I_n$  est de rang  $n$ , d'après le théorème 4.1.10(3),  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est libre. En outre, tout vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

s'écrit comme

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

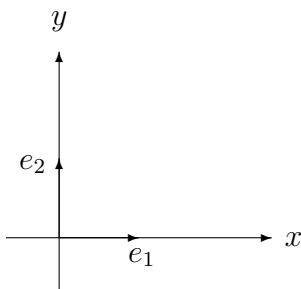
Par définition,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Ceci achève la démonstration.

**Exemple.** (1) La base canonique de  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$  est  $\{1\}$ .

(2) La base canonique du plan  $\mathbb{R}^2$  est

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

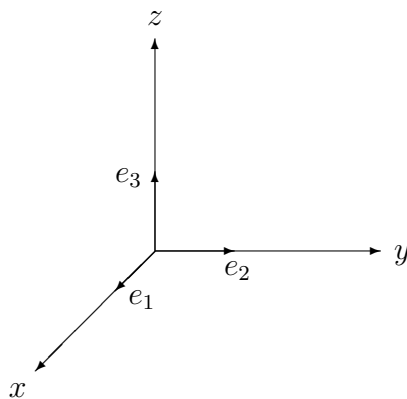
illustrée par le diagramme comme suit:



(3) La base canonique de l'espace usuel  $\mathbb{R}^3$  est

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

illustrée par le diagramme comme suit:



**4.1.14. Théorème.** Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre de vecteurs; ce nombre commun s'appelle *dimension* de  $E$ , noté  $\dim(E)$ .

**Remarque.**  $\dim(E) = 0$  si, et seulement si,  $E = \{0_E\}$ .

**Exemple.** Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ .

En effet,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  de  $n$  vecteurs.

Le résultat suivant nous dit que la dimension de  $E$  est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants.

**4.1.15. Théorème.** Si  $\dim(E) = n$ , alors

- (1) toute famille libre de  $n$  vecteurs de  $E$  est une base;
- (2) toute famille de plus que  $n$  vecteurs de  $E$  est liée.

**Exemple.** Comme  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , d'après le théorème 4.1.15(2), les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants.

**Exercice.** Vérifier que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.** Comme  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , d'après le théorème 4.1.15(1), il suffit de vérifier que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est libre. Pour ce faire, on échelonne la matrice

$$(u_1 \ u_2 \ u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\text{rg}(u_1 \ u_2 \ u_3) = 3$ . D'après le théorème 4.1.10(3),  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est libre, et donc, une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.2. Coordonnées

Le but de cette section est d'appliquer la théorie de matrices pour étudier les espaces vectoriels de dimension finie. Partout dans cette section, on se fixe  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie.

**4.2.1. Définition.** Soit  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une base de  $E$ . Alors tout  $u \in E$  s'écrit d'une façon unique

$$(*) \quad u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n,$$

où  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  s'appellent *coordonnées* de  $u$  dans la base  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

**Remarque.** Si l'on considère  $(u_1, \dots, u_n)$  comme une matrice-ligne et met les coordonnées  $a_1, \dots, a_n$  en colonne

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

appelée *colonne des coordonnées* de  $u$  dans la base  $\{u_1, \dots, u_n\}$ , alors l'équation (\*) devient

$$u = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ceci est illustrée par le diagramme suivant:

$$(u_1, \dots, u_n) \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} u.$$

**Exercice.** Considérons la base de  $\mathbb{R}^2$  suivante:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Donner le vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$  dont les coordonnées dans  $\{u_1, u_2\}$  sont  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ .
- (2) Trouver la colonne des coordonnées de

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (2.1) dans la base  $\{u_1, u_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ ;
- (2.2) dans la base canonique  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ ;
- (2.3) dans la base non canonique  $\{e_2, e_1\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Solution.** (1) D'après l'hypothèse, on a

$$u = \sqrt{2} \cdot u_1 + \sqrt{3} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (2.1) Supposons que les coordonnées de  $u$  dans  $\{u_1, u_2\}$  sont  $a_1, a_2$ , c'est-à-dire,

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = u.$$

Ceci est équivalent au système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour ce résoudre, on échelonne

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$



Ceci nous donne la solution  $a_1 = \frac{5}{2}$  et  $a_2 = -\frac{1}{2}$ . C'est-à-dire,

$$u = \frac{5}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2.$$

D'où, les coordonnées de  $u$  dans  $\{u_1, u_2\}$  sont  $\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}$ , et donc, la colonne de coordonnées de  $u$  dans  $\{u_1, u_2\}$  est

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On écrit aussi

$$u = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2.2) On voit aisément que

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2.$$

D'où, la colonne des coordonnées de  $u$  dans  $\{e_1, e_2\}$  est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = u.$$

(2.3) Par contre, comme  $u = 3 \cdot e_2 + 2 \cdot e_1$ , les coordonnées de  $u$  dans la base non-canonique  $\{e_2, e_1\}$  sont  $\{3; 2\}$ , et donc, la colonne des coordonnées de  $u$  dans  $\{e_2, e_1\}$  est

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'observation suivante sera pratique.

**4.2.2. Lemme.** Considérons l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^n$ . Étant donné un vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

ses coordonnées dans la base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sont  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , appelées *coordonnées canoniques*. Par conséquent, la colonne des coordonnées canoniques de  $u$  est simplement  $u$ .

Plus généralement, on a la notion suivante.

**4.2.3. Définition.** Soient  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une base de  $E$  et  $\{v_1, \dots, v_m\}$  une famille ordonnée de vecteurs de  $E$ . Si  $A_j$  est la colonne des coordonnées de  $v_j$  dans  $\{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , alors la matrice

$$(A_1 \cdots A_m) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

s'appelle *matrice des coordonnées* de  $\{v_1, \dots, v_m\}$  dans  $\{u_1, \dots, u_n\}$ , notée  $P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_m\}}$ .

**Remarque.** (1)  $P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v\}}$  est la colonne de coordonnées de  $v$  dans  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

(2) En considérant  $(v_1, \dots, v_m)$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  comme des matrices-ligne, on a

$$(v_1, \dots, v_m) = (u_1, \dots, u_n) P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_m\}}.$$

Ceci est illustré par le diagramme suivant:

$$(u_1, \dots, u_n) \xrightarrow{P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_m\}}} (v_1, \dots, v_m).$$

**Exercice.** Considérer la base de  $\mathbb{R}^2$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trouver la famille  $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$ , dont la matrice des coordonnées dans  $\{u_1, u_2\}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** D'après l'hypothèse, on a

$$(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$v_1 = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; v_2 = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; v_3 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.2.2.

**4.2.4. Lemme.** Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$P_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{v_1, \dots, v_m\}} = (v_1 \cdots v_m).$$

**Exercice.** Posons  $v_1 = u_1 - u_2; v_2 = u_2 - u_3; v_3 = u_1 - u_3; v_4 = u_3$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(1) En sachant que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base, trouver  $P_{\{u_1, u_2, u_3\}}^{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}$ .

(2) Considérant la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , trouver  $P_{\{e_1, e_2, e_3\}}^{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}$ .

**Solution.** (1) On cherche les coordonnées de  $v_i$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ . Par l'hypothèse,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 \\ v_2 &= 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + (-1) \cdot u_3 \\ v_3 &= 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + (-1) \cdot u_3 \\ v_4 &= 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 \end{aligned}$$

D'où,

$$P_{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}^{\{u_1, u_2, u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On doit trouver les coordonnées canoniques de chacun des  $v_i$ . D'après l'hypothèse, on trouve

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 4.2.4, on a

$$P_{\{e_1, e_2, e_3\}}^{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}} = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une famille de vecteurs est une base ou non en utilisant sa matrice des coordonnées dans une base connue.

**4.2.5. Théorème.** Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base de  $E$ , alors  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  de  $E$  forment une base de  $E$  si, et seulement si,  $P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_n\}}$  est inversible.

**Exercice.** Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer si  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  ou non.

**Solution.** Considérons la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors

$$P_{\{e_1, e_2, e_3\}}^{\{u_1, u_2, u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étant de rang 2, la matrice  $P_{\{e_1, e_2, e_3\}}^{\{u_1, u_2, u_3\}}$  est non inversible. D'après le théorème 4.2.5,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  n'est pas une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**4.2.6. Corollaire.** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , alors les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$  si, et seulement si,  $A$  est inversible.

**Exemple.** Considérons la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{rg}(A) = 3$ , la matrice  $A$  est inversible. Par conséquent,  $\mathbb{R}^3$  a une base comme suit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

On étudiera la matrice des coordonnées d'une base dans une autre base.

**4.2.7. Définition.** Soient  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  deux bases de  $E$ . La *matrice de passage* de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  à  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est définie comme étant

$$P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_n\}},$$

la matrice des coordonnées de la famille  $\{v_1, \dots, v_n\}$  dans la base  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

**Remarque.** D'après le théorème 4.2.5,  $P = P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_n\}}$  est inversible telle que

$$(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n)P.$$

Ceci est illustré par le diagramme suivant:

$$(u_1, \dots, u_n) \xrightarrow{P} (v_1, \dots, v_n).$$

**Exercice.** Considérons la base de  $\mathbb{R}^2$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (1) Donner les matrices de passage de  $\{u_1, u_2\}$  à  $\{u_1, u_2\}$  et à  $\{u_2, u_1\}$  respectivement.
- (2) Donner la base  $\{v_1, v_2\}$  à laquelle la matrice de passage de  $\{u_1, u_2\}$  est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** (1) Comme  $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$  et  $u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$ , on obtient

$$P_{\{u_1, u_2\}}^{\{u_2, u_1\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P_{\{u_1, u_2\}}^{\{u_2, u_1\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(2) Posons

$$(v_1, v_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$v_1 = 2u_1 + 3u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = 4u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Par définition,  $P_{\{u_1, u_2\}}^{\{v_1, v_2\}} = P$ . Comme  $\det(P) = -10$ , on voit que  $P$  est inversible. D'après le théorème 4.2.5,  $\{v_1, v_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Par définition, la matrice de passage de  $\{u_1, u_2\}$  à  $\{v_1, v_2\}$  est  $P$ .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.2.4.

**4.2.8. Lemme.** Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ , alors la matrice de passage de la base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$  à  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est  $(u_1 \cdots u_n)$ .

**Exemple.** Considérons la base de  $\mathbb{R}^2$  suivante:

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après le lemme 4.2.8, la matrice de passage de  $\{e_1, e_2\}$  à  $\{v_1, v_2\}$  est

$$(v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 4.2.2, il est trivial de trouver les coordonnées canoniques d'un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dans la base canonique. Le résultat suivant dit en particulier trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base non canonique au moyen de la matrice de passage.

**4.2.9. Théorème.** Soient  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  deux bases de  $E$ . Soit  $P$  la matrice de passage de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  à  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Si  $w_1, \dots, w_m \in E$  avec  $A = P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{w_1, \dots, w_m\}}$ , alors

$$P_{\{v_1, \dots, v_n\}}^{\{w_1, \dots, w_m\}} = P^{-1}A.$$

**Remarque.** Le théorème 4.2.9 est illustrée par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} (u_1, \dots, u_n) & \xrightarrow{P} & (v_1, \dots, v_n) \\ & \searrow A & \vdots P^{-1}A \\ & & \{w_1, \dots, w_m\}. \end{array}$$

**Exercice.** (1) Montrer que le jaune  $J$ , le magenta  $M$ , le cyant  $C$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Déterminer si l'on peut mélanger le jaune, le magenta et le cyant pour obtenir la couleur

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

**Solution.** (1) On sait que

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 4.2.4, on a

$$P_{\{e_1, e_2, e_3\}}^{\{J, M, C\}} = (J M C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} := P.$$

Comme  $\det(P) = 3$ ,  $P$  est inversible. D'après le théorème 4.2.5,  $\{J, M, C\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(2) En vue de la proposition 4.1.5, la couleur  $D$  est obtenue en mélangeant  $J, M, C$  si, et seulement si,

$$D = a_1 J + a_2 M + a_3 C; \text{ où } 0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1.$$

Ainsi, on doit trouver les coordonnées de  $A$  dans la base  $\{J, M, C\}$ . Pour ce faire, on remarque la matrice de passage de  $\{e_1, e_2, e_3\}$  à  $\{J, M, C\}$  est  $P$ , et la colonne des coordonnées de  $D$  dans  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est  $D$ . D'après le théorème 4.2.9, la colonne des coordonnées de  $D$  dans  $\{J, M, C\}$  est  $P^{-1}A$ . Pour ce calculer, on échelonne  $(P | D)$  comme suit:

$$(P | D) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Donc,

$$P_{\{J, M, C\}}^{\{D\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire,

$$D = \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}C.$$

Comme  $-\frac{1}{4} < 0$ , d'après la proposition 4.1.5, on ne peut pas obtenir la couleur  $D$  en mélangeant le jaune, le magenta, et le cyan.

### 4.3. Sous-espaces vectoriels

Le but de cette section est d'étudier un type de sous-ensembles d'un espace vectoriel, appelés *sous-espace vectoriels*. Les sous-espace vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  apparaissent souvent en lien avec une matrice.

Partout dans cette section, on se fixe  $E$  un espace vectoriel réel.

**4.3.1. Définition.** Un sous-ensemble non vide  $F$  de  $E$  s'appelle *sous-espace vectoriel* si les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) Si  $u \in F$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $au \in F$ .
- (2) Si  $u, v \in F$ , alors  $u + v \in F$ .

**Exemple.** (1) L'ensemble  $\{0_E\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $E$  l'est aussi. Ces deux s'appellent *sous-espaces triviaux* de  $E$ .

(2) L'ensemble des couleurs numériques n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . En effet, il n'est pas stable pour l'addition.

**Exercice.** Vérifier que le plan  $P_{x,y}$  des  $x, y$  de  $\mathbb{R}^3$  est un sous-espace vectoriel.

**Démonstration.** Par définition, on a

$$P_{x,y} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour tous

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \in P_{x,y},$$

et tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a

$$au = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ 0 \end{pmatrix}, u + v = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ 0 \end{pmatrix} \in P_{x,y}.$$

D'où,  $P_{x,y}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

On rassemble des propriétés d'un sous-espace vectoriel dans le résultat suivant.

**4.3.2. Lemme.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors

- (1)  $0_E \in F$ ;
- (2) si  $u \in F$ , alors  $-u \in F$ ;
- (3) si  $u_1, \dots, u_r \in F$ , alors  $a_1u_1 + \dots + a_ru_r \in F$ , pour tous  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ .

**Remarque.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $F$  lui-même est un espace vectoriel réel pour les opérations induites de celles de  $E$  comme suit:

$$\cdot : \mathbb{R} \times F \rightarrow F : (a, u) \mapsto au$$

et

$$+ : F \times F \rightarrow F : (u, v) \mapsto u + v.$$

En particulier,  $0_F = 0_E$ .

**Exemple.** La droite affine de  $\mathbb{R}^2$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1 \right\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel, puisque  $\mathbf{0} \notin D$ .

**4.3.3. Proposition.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- (1) Si  $\dim(E) = n$ , alors  $\dim(F) \leq n$ .
- (2) Si  $F \neq E$ , alors  $\dim(F) < n$ .

**Remarque.** Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  s'appelle

- (1) une *droite vectorielle* si  $\dim(F) = 1$ ;
- (2) un *plan vectoriel* si  $\dim(F) = 2$ .

**Exemple.** (1) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel non trivial de  $\mathbb{R}^2$ , alors

$$\dim\{0_{\mathbb{R}^2}\} < \dim(F) < \dim(\mathbb{R}^2).$$

D'où,  $0 < \dim(F) < 2$ , et donc,  $\dim(F) = 1$ . C'est-à-dire,  $F$  est une droite vectorielle.

- (2) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel non trivial de  $\mathbb{R}^3$ , alors

$$\dim\{0_{\mathbb{R}^3}\} < \dim(F) < \dim(\mathbb{R}^3).$$

D'où,  $0 < \dim(F) < 3$ , et donc,  $\dim(F) = 1$  ou  $2$ . C'est-à-dire,  $F$  est une droite vectorielle ou un plan vectoriel.

**4.3.4. Proposition.** Si  $u_1, \dots, u_r \in E$ , alors l'ensemble

$$\langle u_1, \dots, u_r \rangle := \{a_1 u_1 + \dots + a_r u_r \mid a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé *sous-espace vectoriel engendré* par  $u_1, \dots, u_r$ .

**Remarque.** (1) Par définition,  $u_1, \dots, u_r \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ .

(2) Une famille  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de vecteurs  $E$  forment une base si, et seulement si,  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre et  $E = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ .



**Exercice.** Calculer le sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  engendré par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Solution.** Par définition, on a

$$F = \langle e_1, e_2 \rangle = \{xe_1 + ye_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

ce qui est le plan des  $x, y$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Le résultat suivant sera pratique dans le calcul.

**4.3.5. Proposition.** Soit  $F = \langle u_1, \dots, u_{r-1}, u_r \rangle$ , où  $u_i \in E$ . Si  $u_r$  est une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_{r-1}$ , alors

$$F = \langle u_1, \dots, u_{r-1} \rangle.$$

**Exemple.** Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Comme  $u_4 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$  et  $u_3 = u_1 + u_2$ , d'après la proposition 4.3.5, on a

$$\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 2y \\ 3x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

On s'intéresse à trouver une base d'un sous-espace vectoriel. Le résultat suivant est évident.

**4.3.6. Lemme.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $u_1, \dots, u_r$ , alors  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est une base de  $F$  si, et seulement si,  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est libre.

**Exemple.** (1) Si  $u \in \mathbb{R}^n$  est non nul, alors

$$\langle u \rangle = \{au \mid a \in \mathbb{R}\}$$

est une droite vectorielle. En effet, comme  $u$  est non nul,  $\{u\}$  est libre. D'après le lemme 4.3.6,  $\{u\}$  est une base de  $\langle u \rangle$ . En particulier,  $\dim \langle u \rangle = 1$ .

(2) Si  $u, v \in \mathbb{R}^n$  sont non co-linéaires, alors

$$\langle u, v \rangle = \{au + bv \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est un plan vectoriel. En effet, comme  $u, v$  ne se trouvent pas sur la même droite vectorielle, aucun de  $u, v$  n'est un multiple de l'autre. D'après le lemme 4.1.9,  $\{u, v\}$  est libre; et d'après le lemme 4.3.6,  $\{u, v\}$  est une base de  $\langle u, v \rangle$ . En particulier,  $\dim \langle u, v \rangle = 2$ .

On va étudier deux sous-espaces associés à une matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

**4.3.7. Définition.** Soit  $A = (A_1 \cdots A_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , où  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ . Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  engendré par  $A_1, \dots, A_n$  s'appelle *espace-colonne* de  $A$ , noté  $\mathcal{C}(A)$ .

**Remarque.** Tout sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  est l'espace-colonne d'une matrice.

**Exemple.** (1) Considérons

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2).$$

Par définition, on a

$$\mathcal{C}(I_2) = \langle e_1, e_2 \rangle = \{xe_1 + ye_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathcal{C}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Utilisant la notion d'espace-colonne de matrice, on obtient une interprétation alternative de la compatibilité d'un système d'équations linéaires comme suit.

**4.3.8. Proposition.** Si  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , alors

- (1)  $\mathcal{C}(A) = \{Au \mid u \in \mathbb{R}^n\}$ ;
- (2) un système d'équations linéaires

$$AX = B$$

est compatible si, et seulement si,  $B \in \mathcal{C}(A)$ .

**Exercice.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 14 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer lequel de  $u, v$  appartient à  $\mathcal{C}(A)$ .

**Solution.** La question est de déterminer lequel des systèmes  $AX = u$  et  $AX = v$  est compatible. Au lieu d'échelonner  $(A | u)$  et  $(A | v)$  respectivement, on échelonne  $(A | u | v)$ .

$$(A | u | v) = \left( \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 14 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

D'où, on voit que  $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A | u)$ , mais  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | v)$ . Ainsi  $AX = u$  est incompatible, et  $AX = v$  est compatible. D'après la proposition 4.3.8(2),  $u \notin \mathcal{C}(A)$  et  $v \in \mathcal{C}(A)$ .

On étudiera comment trouver une base de l'espace-colonne d'une matrice. Le résultat suivant est une conséquence du lemme 4.3.6 et du théorème 4.1.10.

**4.3.9. Proposition.** Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  de colonnes  $A_1, \dots, A_n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1)  $A_1, \dots, A_n$  forment une base de  $\mathcal{C}(A)$ .
- (2)  $A_1, \dots, A_n$  sont linéairement indépendantes.
- (3)  $\text{rg}(A) = n$ , le nombre de colonnes de  $A$ .

**Exercice.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier si les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathcal{C}(A)$  ou non.

**Solution.** Comme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a  $\text{rg}(A) = 3$ , le nombre de colonnes de  $A$ . D'après la proposition 4.3.9, les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathcal{C}(A)$ .

On a le résultat général suivant pour trouver une base de l'espace-colonne d'une matrice.

**4.3.10. Théorème.** Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  de colonnes  $A_1, \dots, A_n$ . Si les pivots d'une forme échelonnée de  $A$  se trouvent dans les colonnes  $j_1, \dots, j_r$ , alors  $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_r}\}$  est une base de  $\mathcal{C}(A)$ . En particulier,  $\dim \mathcal{C}(A) = \text{rg}(A)$ .

**Exercice.** Trouver une base du sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Par l'hypothèse,  $F = \mathcal{C}(A)$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := B$$

Les pivots de  $B$  se trouvent dans les colonnes 1 et 2. D'après le théorème 4.3.10,  $\{u_1, u_2\}$  est une base de  $F$ .

Enfin, on revient à la résolution d'un système homogène d'équations linéaires.

**4.3.11. Lemme.** Si  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , alors l'ensemble

$$\mathcal{N}(A) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , appelé *noyau* de  $A$ .

**Remarque.** On voit que  $\mathcal{N}(A)$  est l'ensemble des solutions du système homogène

$$AX = 0.$$

Ainsi,  $\mathcal{N}(A)$  s'appelle aussi *espace-solution* de ce système homogène.

Le résultat suivant nous dit comment trouver une base du noyau d'une matrice.

**4.3.12. Théorème.** Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  dont  $A'$  est une forme échelonnée.

Si le système homogène échelonné  $A'X = 0$  n'a aucune inconnue libre, alors  $\mathcal{N}(A)$  est nul et a pour base l'ensemble vide.

Si le système échelonné  $A'X = 0$  admet  $s$  inconnues libres  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ , alors on le résout successivement

- (1) en posant  $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = \dots = x_{i_s} = 0$ , ce qui donne une solution  $u_1$ ;
- (2) en posant  $x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 1, x_{i_3} = \dots = x_{i_s} = 0$ , ce qui donne une solution  $u_2$ ;
- ⋮

(s) en posant  $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_{s-1}} = 0, x_{i_s} = 1$ , ce qui donne une solution  $u_s$ .

Alors  $\{u_1, \dots, u_s\}$  est une base de  $\mathcal{N}(A)$ .

En tout cas, on voit que  $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{rg}(A)$ , le nombre d'inconnues libres du système homogène échelonné  $A'X = 0$ .

**Exercice.** Trouver une base de l'espace-solution du système homogène suivant:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + 3x_6 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 7x_6 &= 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 3x_5 + 15x_6 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 10x_6 &= 0. \end{aligned}$$

**Solution.** En échelonnant la matrice augmentée, on réduit ce système au système échelonné suivant:

$$\begin{aligned} \boxed{2x_1} + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + 3x_6 &= 0 \\ & \boxed{x_3} + x_4 + 5x_5 - x_6 = 0 \\ & & \boxed{x_5} + 2x_6 = 0 \\ & & & 0 = 0. \end{aligned}$$

Les inconnues libres sont  $x_2, x_4$  et  $x_6$ . Ainsi l'espace-solution a une base composée de trois solutions  $u_1, u_2, u_3$ .

(1) En posant  $x_2 = 1, x_4 = x_6 = 0$ , on a un système sans inconnues libres

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 - x_5 &= -1 \\ x_3 + 5x_5 &= 0 \\ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

En résolvant-le par substitution, on trouve  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0$  et  $x_5 = 0$ . Ceci donne la première solution de la base

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) En posant  $x_2 = 0, x_4 = 1$  et  $x_6 = 0$ , on a un système sans inconnues libres

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 - x_5 &= -2 \\ x_3 + 5x_5 &= -1 \\ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

En résolvant-le par substitution, on trouve  $x_1 = -\frac{3}{2}, x_3 = -1$  et  $x_5 = 0$ . Ceci donne la deuxième solution de la base

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) En posant  $x_2 = x_4 = 0$  et  $x_6 = 1$ , on a un système sans inconnues libres

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 - x_5 &= -3 \\ x_3 + 5x_5 &= 1 \\ x_5 &= -2. \end{aligned}$$

En résolvant-le par substitution, on trouve  $x_1 = 3, x_3 = 11$  et  $x_5 = -2$ . Ceci donne la troisième solution de la base

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, on obtient une base de l'espace-solution du système original comme suit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

#### 4.4. Sous-espaces affines

On a étudié les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  dans la section précédente. Cette section a pour but d'étudier les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^n$ . On commence par la notion de coordonnées homogènes, ce qui est important pour en infographie.

**4.4.1. Définition.** Soit un vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Un vecteur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

s'appelle un vecteur de *coordonnées homogènes* de  $u$  si  $x_{n+1} \neq 0$  et

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \end{pmatrix} = u.$$

En particulier,

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

s'appelle le vecteur des *coordonnées homogènes normalisées* de  $u$ .

**Exemple.** (1) Si  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul de  $\mathbb{R}^2$ , alors

$$\hat{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

est un vecteur de coordonnées homogènes du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

En outre, on voit que

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $v, \hat{u}$  sont deux vecteurs de coordonnées homogènes de  $u$ .

Le résultat suivant décrit les vecteurs de coordonnées homogènes d'un vecteur donné.

**4.4.2. Lemme.** Soit un vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(1) Si  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  est un vecteur de coordonnées homogènes de  $u$ , alors  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$  est aussi un vecteur de coordonnées homogènes de  $u$  si, et seulement si,  $w = av$  avec  $a \neq 0$ .

(2) L'ensemble des vecteurs de coordonnées homogènes de  $v$  est

$$\left\{ \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \\ a \end{pmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Exercice.** Soient

$$v = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -21 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(1) Vérifier que  $v, w$  sont des vecteurs de coordonnées homogènes du même vecteur.

(2) Écrire  $w = av$  avec  $a$  non nul.

**Solution.** On voit que

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{2} \\ -\frac{6}{2} \\ \frac{14}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} =: u \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\frac{15}{3} \\ \frac{9}{3} \\ -\frac{21}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = -u.$$

En outre, on voit que  $v = 2\hat{u}$  et  $w = (-3)\hat{u}$ . Par conséquent,  $w = -\frac{3}{2}v$ .

On définira la notion de dépendance affine de vecteurs en termes de la dépendance linéaire de leurs vecteurs de coordonnées homogènes normalisées.

**4.4.3. Définition.** Des vecteurs  $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$  sont dits

(1) *affinement dépendants*, ou bien,  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est *affinement liée*, si  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r$  sont linéairement dépendants dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ;

(2) *affinement indépendants*, ou bien  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est *affinement libre*, si  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Remarque.** D'après le théorème 4.1.15(2), une famille affinement libre de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  contient au plus  $n + 1$  vecteurs.

**Exemple.** D'après le lemme 4.1.9(1), toute famille d'un vecteur est affinement libre.



**Exercice.** Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer si  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  est affinement liée ou affinement libre.

**Solution.** Le problème se ramène à déterminer si la famille  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4\}$  est liée ou libre dans  $\mathbb{R}^4$ . Pour ce faire, on échelonne

$$A = (\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \hat{u}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{rg}(A) = 3 < 4$ , d'après le théorème 4.1.10(3),  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4\}$  est liée. Par définition,  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  est affinement liée.

**4.4.4. Proposition.** Soient  $u_1, \dots, u_r; u \in \mathbb{R}^n$  avec  $\{u_1, \dots, u_r\}$  affinement libre. Pour tous  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ , on a que

$$u = c_1 u_1 + \dots + c_r u_r \text{ et } c_1 + \dots + c_r = 1$$

si, et seulement si,

$$\hat{u} = c_1 \hat{u}_1 + \dots + c_r \hat{u}_r.$$

Si c'est le cas,  $u$  s'appelle *barycentre* de  $u_1, \dots, u_r$ ; et  $c_1, \dots, c_r$  s'appellent *coordonnées barycentriques* de  $u$  dans  $\{u_1, \dots, u_r\}$ .

**Remarque.** Un vecteur  $u$  est un barycentre de  $u_1, \dots, u_r$  dans  $\mathbb{R}^n$  si, et seulement si, le vecteur  $\hat{u}$  est une combinaison linéaire de  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Exercice.** Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vérifier que  $u$  est un barycentre de  $u_1, u_2, u_3$ , en donnant les coordonnées barycentriques.

**Solution.** On devra résoudre l'équation suivante:

$$x_1 \hat{u}_1 + x_2 \hat{u}_2 + x_3 \hat{u}_3 = \hat{u},$$

c'es-à-dire, le système

$$(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3)X = \hat{u}.$$

Comme

$$(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid \hat{u}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

on obtient

$$\hat{u} = \frac{3}{2}\hat{u}_1 - \hat{u}_2 + \frac{1}{2}\hat{u}_3.$$

Ainsi  $u$  est un barycentre de  $u_1, u_2, u_3$  dont les coordonnées barycentriques sont  $\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}$ . C'est-à-dire,

$$u = \frac{3}{2}u_1 - u_2 + \frac{1}{2}u_3 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} + (-1) + \frac{1}{2} = 1.$$

On étudiera les sous-espaces affines. Pour ce but, on identifiera un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  avec son point d'arrivée.

**4.4.5. Proposition.** Si  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\{u_1, u_2\}$  est affinement libre si, et seulement si,  $u_1 \neq u_2$ ; et dans ce cas, l'ensemble des barycentres de  $u_1, u_2$  est donné par

$$D(u_1, u_2) = \{(1-t)u_1 + tu_2 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

ce qui est la droite affine passant par  $u_1, u_2$ ; et

$$\delta(u_1, u_2) = \{(1-t)u_1 + tu_2 \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

est le segment d'extrémités  $u_1, u_2$ .

**Exercice.** Trouver l'équation de la droite affine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  passant par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Soit un vecteur quelconque

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

On a  $u \in D$  si, et seulement si,  $u$  est un barycentre de  $u_1, u_2$  si, et seulement si,  $\hat{u}$  est une combinaison linéaire de  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  si, et seulement si,  $\text{rg}(\hat{u}_1 \hat{u}_2) = \text{rg}(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \mid \hat{u})$ . Maintenant,

$$(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \mid \hat{u}) = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 1 & 5 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & x-2 \\ 0 & 0 & 2x-y-3 \end{array} \right).$$

Par conséquent,  $u \in D$  si, et seulement si,

$$2x - y - 3 = 0.$$

Maintenant, on étudiera l'indépendance affine de trois vecteurs.

**4.4.6. Proposition.** Si  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est affinement libre si, et seulement si,  $u_1, u_2, u_3$  n'appartiennent pas à une même droite affine; et dans ce cas, l'ensemble des barycentres de  $u_1, u_2, u_3$  est

$$P(u_1, u_2, u_3) := \{(1 - s - t)u_1 + su_2 + tu_3 \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

ce qui est le plan affine passant par  $u_1, u_2, u_3$ . En outre,

$$\Delta(u_1, u_2, u_3) = \{(1 - s - t)u_1 + su_2 + tu_3 \mid 0 \leq s, t, s + t \leq 1\}$$

est le triangle de sommets  $u_1, u_2, u_3$ .

**Exercice.** Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- (1) Vérifier que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est affinement libre.
- (2) Donner l'équation du plan affine  $P$  passant par  $u_1, u_2, u_3$ .
- (3) Déterminer si  $u$  appartient au triangle  $\Delta$  de sommets  $u_1, u_2, u_3$ .

**Solution.** Soit un vecteur quelconque

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Pour les parties (1), (2) et (3), on doit échelonner les matrices  $(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3)$ ,  $(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid u)$  et  $(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid v)$ , respectivement. Pour ce faire, on échelonne la matrice  $(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid u \mid v)$  comme suit:

$$(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid u \mid v) = \left( \begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 0 & x & -1 \\ 3 & 7 & 4 & y & 0 \\ 7 & 6 & 7 & z & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x-1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & x+z-8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x+y+5z-39 & 0 \end{array} \right) \quad (*)$$

- (1) D'après (\*), on voit que  $(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3)$  se réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où,  $\text{rg}(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3) = 3$ . Donc  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$  est libre dans  $\mathbb{R}^4$ . Par conséquent,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est affinement libre dans  $\mathbb{R}^3$ .

(2) D'après (\*), on voit que  $(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid \hat{u})$  se réduit à

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 & x+z-8 \\ 0 & 0 & 0 & x+y+5z-39 \end{array} \right)$$

Maintenant,  $u \in P$  si, et seulement si,  $u$  est un barycentre de  $u_1, u_2, u_3$  si, et seulement si,  $\hat{u}$  est une combinaison linéaire de  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$  si, et seulement si,  $\text{rg}(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3) = \text{rg}(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid \hat{u})$  ai et aeusement si

$$x + y + 5z = 39.$$

(3) Il s'agit de vérifier si l'on peut exprimer

$$a_1 \hat{u}_1 + a_2 \hat{u}_2 + a_3 \hat{u}_3 = \hat{v}; \text{ où } a_1, a_2, a_3 \geq 0.$$

On commence par résoudre le système

$$(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3)X = \hat{v}.$$

D'après (\*), on voit que  $(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid \hat{v})$  se réduit à

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

D'où,  $\hat{v} = \hat{u}_1 - \hat{u}_2 + \hat{u}_3$ . Ainsi,  $v$  est un barycentre de  $u_1, u_2, u_3$ , dont les coordonnées baricentriques dans  $\{u_1, u_2, u_3\}$  sont  $1, -1, 1$ . Comme  $-1$  est négatif,  $v \notin \Delta$ .

On conclut cette section par une application de coordonnées barycentriques en imagerie, qui donne une méthode pour colorer un triangle d'une façon lisse.

**4.4.7. Théorème.** Soit  $\Delta$  un triangle coloré de sommets  $u_1, u_2, u_3$  auxquels les couleurs sont  $C_1, C_2, C_3$  respectivement. Si  $u \in \Delta$  dont les coordonnées barycentriques dans  $\{u_1, u_2, u_3\}$  sont  $a_1, a_2, a_3$  respectivement, alors la couleur  $C$  à  $u$  sera deonnée par

$$C = a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3.$$

**Exercice.** Considérer

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Soit  $\Delta$  un triangle coloré de sommets  $u_1, u_2, u_3$  auxquels les couleurs sont le magenta  $\{1; 0; 1\}$ , le magenta claire  $\{1; 0, 4; 1\}$ , et le pourpre  $\{0, 6; 0; 1\}$  respectivement.

- (1) Vérifier que  $u \in \Delta$ .
- (2) Donner la couleur  $C$  à  $u$ .

**Solution.** (1) Il s'agit de vérifier que  $\hat{u}$  est une combinaison linéaire de  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$  à coefficients entre 0 et 1. Pour ce faire, on échelonne

$$(\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \mid \hat{u}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3,5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

D'où,

$$u = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{4}u_3.$$

Par conséquent,  $u \in \Delta$  donc les coordonnées barycentrique dans  $\{u_1, u_2, u_3\}$  sont  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ .

- (2) D'après la proposition 4.4.7,

$$C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0,4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,  $C$  se compose 90% du rouge, 20% du vert, et 100% du bleu.

## 4.5. Exercices

1. Montrer qu'un espace vectoriel réel non nul contient une infinité de vecteurs.
2. Soit  $D$  une couleur obtenue en mélangeant 20% du blanc, 25% du magenta, 30% du gris et 10% du pourpre.
  - (1) Exprimer la colonne des coordonnées RVB de la couleur  $D$  comme combinaison linéaire des colonnes des coordonnées du blanc, du magenta, du gris et du pourpre.
  - (2) Donner les coordonnées RVB de la couleur  $D$ .
3. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

À l'aide du lemme 4.1.6 et du théorème 4.1.7, déterminer lequel de  $u$  et  $v$  est une combinaison linéaire de  $u_1, u_2, u_3$ ; et donner une expression explicite dans le cas échéant.

4. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner les valeurs réelles de  $a$  et  $b$  pour que  $u$  soit une combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$ .

5. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^5$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 5 \\ 31 \\ 24 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (1) Exprimer  $u$ , à l'aide du lemme 4.1.6, comme une combinaison linéaire de  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
  - (2) Déterminer, à l'aide du théorème 4.1.7, si  $v$  est une combinaison linéaire de  $u_1, u_2, u_3$  ou non.
  - (3) Vérifier, à l'aide du théorème 4.1.10, que la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est libre.
  - (4) Vérifier, à l'aide de la partie (1) et la définition 4.1.8, que  $\{u_1, u_2, u_3, u\}$  est liée.
6. (1) Montrer qu'aucune des couleurs blanc, cyan et magenta ne peut être obtenue en mélangeant deux autres. *Indice:* Vérifier que leurs colonnes des coordonnées RVB sont linéairement indépendantes.
- (2) Déterminer si l'on peut obtenir le pourpre en mélangeant le blanc, le cyan et le magenta.
  - (3) Déterminer si l'on peut obtenir le blanc en mélangeant le jaune, le magenta et le cyan; et si oui, donner l'intensité de chacune de ces trois couleurs?

7. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \\ a \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer si  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est liée ou libre.
- (2) Donner la valeur réelle de  $a$  pour que  $u$  soit une combinaison linéaire de  $u_1, u_2, u_3$ ; et dans ce cas, exprimer  $u$  comme une combinaison linéaire de  $u_1, u_2, u_3$ .

8. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont linéairement dépendants ou indépendants:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \\ 23 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

9. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier, à l'aide du théorème 4.1.10, que  $\{u_1, u_2\}$  est libre.
- (2) Montrer que  $\{u_1, u_2\}$  n'est pas une base de  $\mathbb{R}^3$  en donnant, à l'aide du théorème 4.1.7(3), un vecteur qui n'est pas une combinaison linéaire de  $u_1, u_2$ .

10. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier, d'après la définition 4.1.12(1), que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . *Indice:* Appliquer les théorèmes 4.1.10(3) et 4.1.7(3).
- (2) Donner la colonne des coordonnées de  $u$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , en appliquant le lemme 4.1.6 pour exprimer  $u$  comme une combinaison linéaire de  $u_1, u_2, u_3$ .

11. Considérer les couleurs numériques suivantes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que les vecteurs  $M, B, C$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Laquelle de  $A, D$  peut être obtenue en mélangeant  $M, B$  et  $C$ ? Dans le cas échéant, donner l'intensité de chacune de ces trois couleurs.

12. Soit  $E$  un espace vectoriel réel avec des vecteurs linéairement indépendants  $u_1, u_2, u_3$ . Montrer, d'après la définition 4.1.8(2), que  $\{v_1 = 3u_1, v_2 = 2u_1 - u_2, v_3 = u_1 + u_3\}$  est libre.

13. Soit  $\{u_1, u_2, u_3\}$  une base de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $v_1 = a_1u_1; v_2 = a_2u_2; v_3 = a_3u_3$  avec  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ .

- (1) Donner la matrice des coordonnées de  $\{v_1, v_2, v_3\}$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .
- (2) Donner, à l'aide du théorème 4.2.5, la condition pour que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

14. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donner, à l'aide du corollaire 4.2.6, la valeur réelle de  $a$  pour que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

15. Dans chacun des cas suivants déterminer, avec justification, si les vecteurs donnés forment une base de  $\mathbb{R}^3$  ou non.

(1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

(2)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$

(3)  $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

16. Dans chacun des cas suivants déterminer, à l'aide du théorème 4.2.5, si la famille de vecteurs est une base de  $\mathbb{R}^4$  ou non.

(1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix};$

(2)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$



17. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Donner la matrice des coordonnées de  $\{u_1, u_2, u_3\}$  dans la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .
- (2) Vérifier, à l'aide du théorème 4.2.5, que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (3) Donner le vecteur  $w$  dont les coordonnées dans  $\{u_1, u_2, u_3\}$  sont  $\{2, 3, -2\}$ .
- (4) Trouver, à l'aide de le théorème 4.2.9, la colonne des coordonnées de  $u$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

18. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) En appliquant le théorème 4.2.5 à la matrice des coordonnées canoniques, vérifier que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) En utilisant la définition 4.2.1, trouver les coordonnées de  $u$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .
- (3) Donner  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  tels que la matrice des coordonnées de  $\{v_1, v_2\}$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

19. Soit  $\{u_1, u_2, u_3\}$  une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- (1) Trouver la colonne des coordonnées de  $u_1 - u_3$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .
- (2) Trouver la matrice des coordonnées de  $\{u_1, u_2\}$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

20. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que  $\{u_1, u_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Trouver, à l'aide de le théorème 4.2.9, la matrice des coordonnées de  $\{u, v\}$  dans cette base.

21. Soit  $\{u_1, u_2, u_3\}$  une base de  $\mathbb{R}^3$ . Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice de passage de la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  à la base donnée:

(1)  $\{u_1, u_2, u_3\}$ ;      (2)  $\{u_3, u_1, u_2\}$ ;

(3)  $\{u_2, u_3, u_1\}$ ;      (4)  $\{u_3, u_2, u_1\}$ .

22. Dans chacun de cas suivants, déterminer si le sous-ensemble donné de  $\mathbb{R}^2$  est un sous-espace vectoriel ou non.

(1)  $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid b = 2a \right\}$ ;      (2)  $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid b = a^2 \right\}$ .

23. Donner des équations de la droite contenant le vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

24. Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que  $P$  est un plan vectoriel.

(2) Trouver une équation de  $P$ .

25. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs suivants:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner un vecteur  $u \in \mathbb{R}^4$ , qui n'appartient pas à  $F$ .

26. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de  $F$  et donner  $\dim(F)$ . *Indice:* Appliquer le théorème 4.3.10 à la matrice formée de ces vecteurs.

27. Soit  $D$  une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $u \in D$  est non nul, montrer que  $\{u\}$  est une base de  $D$ .

28. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

et considérer ses vecteurs suivants:

$$v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3, v_2 = u_1 - u_2 + u_3, v_3 = u_1 - u_3; u = 3u_1 - u_2 + 4u_3.$$

- (1) Vérifier, à l'aide du lemme 4.3.6, que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $F$ .
- (2) Donner la matrice des coordonnées de  $\{v_1, v_2, v_3\}$  dans  $\{u_1, u_2, u_3\}$ ;
- (3) Vérifier, à l'aide du théorème 4.2.5, que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est aussi une base de  $F$ .

29. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer si  $u$  appartient à  $F$  ou non.
- (2) Donner la valeur réelle de  $a$  pour que  $v$  appartienne à  $F$ .

30. Dans chacun des cas suivants, calculer la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs donnés:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

31. Considérer la matrice et les vecteurs suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Donner une base de  $\mathcal{C}(A)$ .  
 (2) Déterminer le quel de  $u, v$  appartient à  $\mathcal{C}(A)$ .

*Indice:* Pour les deux parties, il suffit d'échelonner  $(A \mid u \mid v)$ .

32. Trouver une base de  $\mathcal{N}(A)$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 9 & 6 \\ -1 & 7 & 4 & 10 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

33. Trouver une base de l'espace-solution de chacun des systèmes homogènes suivants:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ & 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ & x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ & 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

34. Donner une base de la droite vectoriel  $\ell$  définie par les équations :

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - 3y + z &= 0. \end{aligned}$$

35. Donner une base du plan vectoriel  $P$  défini par l'équation :

$$2x - y + 5z = 0.$$

36. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs donnés sont des coordonnées homogènes d'un même vecteur de  $\mathbb{R}^3$ ; et si oui, donner ce vecteur.

$$(1) \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

37. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- (1) Vérifier que  $u_1, u_2, u_3$  sont linéairement dépendants.
- (2) Vérifier que  $u_1, u_2, u_3$  sont affinement indépendants.
- (3) Le quel de  $u, v$  est un barycentre de  $u_1, u_2, u_3$ ? et dans le cas échéant, donner les coordonnées barycentriques de ce vecteur dans  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

38. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

- (1) Donner l'équation de la droite affine  $D$  passant par  $u_1, u_2$ .
- (2) Vérifier que  $u$  appartient à  $D$ , et donner ses coordonnées barycentriques dans  $\{u_1, u_2\}$ .
- (3) Déterminer si  $u$  appartient au segment d'extrémités  $u_1$  et  $u_2$ .

39. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- (1) Vérifier que  $u_1, u_2, u_3$  sont affinement indépendants.
- (2) Trouver l'équation du plan affine  $P$  passant par  $u_1, u_2, u_3$ .
- (3) Vérifier que  $u$  appartient au triangle de sommets  $u_1, u_2, u_3$ ; et donner ses coordonnées barycentriques.
- (4) Soit  $\Delta$  un triangle coloré de sommets  $u_1, u_2, u_3$ , auxquels les couleurs sont le cyan, le jaune et le blanc respectivement. Donner la couleur à  $u$ .

## Chapitre V: Applications linéaires

On a étudié des propriétés d'espaces vectoriels. Dans la plupart de cas, il est utile de relier un espace vectoriel réel à un autre par une application linéaire entre eux. Les applications linéaires jouent un rôle important dans beaucoup de branches de mathématiques ainsi que dans les sciences appliquées comme infographie.

### 5.1. Applications générales

Le but de cette section est d'étudier les applications entre deux ensembles généraux.

**5.1.1. Définition.** Soit  $X, Y$  deux ensembles. Une *application*  $T$  de  $X$  dans  $Y$  est une règle qui associe à chaque élément  $x \in X$  un élément unique  $T(x) \in Y$ , notée

$$T : X \rightarrow Y : x \mapsto T(x).$$

On appelle  $X$  le *domaine*; et  $Y$ , le *codomaine*, de  $T$ . En outre, si  $y = T(x)$ , on appelle alors  $y$  *image* de  $x$  par  $T$ ; et  $x$ , *pré-image* de  $y$ .

**Exemple.** (1) Pour tout ensemble  $X$ , on a *application identité* comme suit:

$$\mathbb{1}_X : X \rightarrow X : x \mapsto x.$$

(2) À chaque vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , on associe son vecteur des coordonnées homogènes normalisés. Cela donne une application comme suit:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Considérons l'ensemble

$$\mathcal{Z}_{\neq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0 \right\}.$$

À chaque vecteur  $u \in \mathcal{Z}_{\neq 0}$ , on associe le vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , dont  $u$  est un vecteur de coordonnées homogènes. Cela donne une application comme suit:

$$T : \mathcal{Z}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}.$$

(4) Par contre,

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

n'est pas une application.

**5.1.2. Définition.** Soit  $T : X \rightarrow Y$  une application.

(1) Si  $Z \subseteq X$ , alors son *image* par  $T$  est le sous-ensemble de  $Y$  suivant:

$$T(Z) = \{T(z) \mid z \in Z\}.$$

(2) En particulier,  $T(X)$  s'appelle *image* de  $T$ , noté  $\text{Im}(T)$ .

**Exercice.** Considérons l'application suivante:

$$T : \mathcal{Z}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{(2)} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}.$$

Calculer  $T(D)$ , où

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Solution.** On voit aisément que

$$T(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**5.1.3. Définition.** Une application  $T : X \rightarrow Y$  est dite

(1) *injective* si tout élément  $y \in Y$  admet au plus une pré-image  $x \in X$ ;

(2) *surjective* si tout élément  $y \in Y$  admet au moins une pré-image  $x \in X$ , c'est-à-dire,  $\text{Im}(T) = Y$ ;

(3) *bijective* si tout élément  $y \in Y$  admet exactement une pré-image  $x \in X$ , c'est-à-dire,  $T$  est surjective et injective.

**Exercice.** Vérifier que l'application suivante, appelée *changement d'échelle*, est bijective:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Soit un vecteur quelconque

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

On doit montrer que  $v$  admet une et une seule pré-image par  $T$ . D'abord, si

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est une pré-image de  $v$  par  $T$ , alors  $T(u) = v$ , c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \text{ D'où, } u = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix}.$$

En outre, d'après l'hypothèse, on voit aisément que

$$T \left( \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix} \right) = v.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix}$$

est la seule pré-image de  $v$  par  $T$ . Ceci achève la démonstration.

**5.1.4. Définition.** Soient deux applications  $T : X \rightarrow Y$  et  $S : Y \rightarrow Z$ . On définit l'*application composée* de  $T$  et  $S$  comme suit:

$$S \circ T : X \rightarrow Z : x \mapsto S(T(x)).$$

**Remarque.** Pour toute application  $T : X \rightarrow Y$ , on a

$$T \circ \mathbf{1}_X = T \text{ et } \mathbf{1}_Y \circ T = T.$$

**Exercice.** Calculer l'application composée des applications suivantes:

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y - z.$$

**Solution.** Pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on a

$$(T \circ S)(pu) = T(S(u)) = T \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 3y - 1.$$



C'est-à-dire,

$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x + 3y - 1.$$

**5.1.5. Définition.** Soit  $T : X \rightarrow Y$  une application bijective. Alors tout  $y \in Y$  a une seule pré-image  $x \in X$ , noté  $x = T^{-1}(y)$ . On définit *inverse* de  $T$  comme étant l'application

$$T^{-1} : Y \rightarrow X : y \mapsto T^{-1}(y).$$

**Remarque.** Si  $T : X \rightarrow Y$  est bijective, alors  $T^{-1} \circ T = \mathbb{1}_X$  et  $T \circ T^{-1} = \mathbb{1}_Y$ .

**Exercice.** Donner l'inverse de l'application bijective suivante

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On a vu que tout vecteur

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

admet une seule pré-image

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi  $T^{-1}$  est l'application suivante:

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}.$$

## 5.2. Applications linéaires

Dès maintenant, on s'intéresse à des applications entre deux espaces vectoriels réels, qui sont compatibles avec les opérations vectorielles. Partout dans cette section, on fixe  $E, F$  deux espaces vectoriels réels.

**5.2.1. Définition.** Une application  $T : E \rightarrow F$  est dite *linéaire* si, pour tous  $u, v \in E$  et  $a \in \mathbb{R}$ , les conditions suivantes sont vérifiées:

- (1)  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ ;
- (2)  $T(au) = aT(u)$ .

**Exemple.** (1) L'application nulle suivante est linéaire:

$$\mathbf{0} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) L'application identité suivante est linéaire:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**5.2.2. Lemme.** Soit  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire.

(1)  $T(0_E) = 0_F$ .

(2) Si  $u_1, \dots, u_r \in E$  et  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ , alors

$$T(a_1 u_1 + \dots + a_r u_r) = a_1 T(u_1) + \dots + a_r T(u_r),$$

**Exemple.** La translation suivante n'est pas linéaire:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En effet,  $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ .

**Exercice.** Donner une application linéaire  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

où  $\{e_1, e_2\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

**Solution.** Pour tout vecteur

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on a  $u = x e_1 + y e_2$ . D'après le lemme 5.2.2(2), on a

$$T(u) = x T(e_1) + y T(e_2) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + y \\ 3x - y \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $T$  est l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + y \\ 3x - y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est un critère de la linéarité d'une application entre deux espaces vectoriels canoniques.

**5.2.3. Théorème.** Une application  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est linéaire si, et seulement si,  $T$  est définie par une matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire,  $T$  est de la forme

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : u \mapsto Au.$$

Dans ce cas,  $A = (T(e_1) \cdots T(e_n))$ , où  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice.** Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application linéaire définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Trouver sa formule en coordonnées canoniques.

**Solution.** Pour tout vecteur

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

d'après la définition, on a

$$T(u) = Au = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}.$$

Ceci donne la formule en coordonnées canoniques de  $T$  comme suit:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}.$$

**Exercice.** Considérer l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 2y - z \\ 3x + 4y + 2z \\ -x + z \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $T$  est linéaire et trouver la matrice qui définit  $T$ .

**Solution.** On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 2y - z \\ 3x + 4y + 2z \\ -x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $T$  est linéaire et définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'application composée de deux applications linéaires.

**5.2.4. Proposition.** Soient deux applications linéaires

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : u \mapsto Au \text{ et } S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p : v \mapsto Bv,$$

où  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$ . Alors  $S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est linéaire définie par  $BA$ . C'est-à-dire,

$$S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p : u \mapsto (BA)u.$$

**Exercice.** Trouver la matrice qui définit l'application composée des applications linéaires

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

et

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On voit que  $T, S$  sont définies respectivement par les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 5.2.4,  $S \circ T$  est linéaire définie par

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -7 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$S \circ T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + y \\ -x + 7y \\ 13x + 6y \end{pmatrix}.$$

On étudiera les propriétés des applications linéaires. Le résultat suivant nous dit qu'une application linéaire envoie un sous-espace vectoriel à un sous-espace vectoriel.

**5.2.5. Proposition.** Soit  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $v_1, \dots, v_r$ , alors  $T(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  engendré par  $T(v_1), \dots, T(v_r)$ .

**Exemple.** Considérons l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y - z \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Calculer l'image par  $T$  du plan vectoriel  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  engendré par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Par définition,  $D = \langle v_1, v_2 \rangle$ . Selon la formule de  $T$  en coordonnées canoniques, on trouve que

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 + 2 + 1 \\ 1 + 2 - 1 \\ 1 + 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, T(v_2) = \begin{pmatrix} 2 + 1 + 1 \\ 2 + 1 - 1 \\ 1 + 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

D'après la proposition 5.2.5,

$$T(D) = \langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle T(v_1) \rangle,$$

ce qui est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ .

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une application linéaire est injective ou non.

**5.2.6. Proposition.** Soit  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in E \mid T(u) = 0_F\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé *noyau* de  $T$ .

**Exemple.** Considérer la projection du plan sur l'axe des  $x$  suivante:

$$p_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $p_x$  est linéaire et trouver son noyau.

**Solution.** On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

D'où,  $p_x$  est l'application linéaire définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on a

$$u \in \mathcal{N}(p_x) \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p_x(u) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}(p_x) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\},$$

ce qui est l'axe des  $y$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'image et le noyau d'une application linéaire à partir de sa matrice.

**5.2.7. Théorème.** Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire définie par une matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , alors

- (1)  $\text{Im}(T) = \mathcal{C}(A)$ , et donc,  $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A)$ ;
- (2)  $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A)$ , et donc,  $\dim(\mathcal{N}(T)) = n - \text{rg}(A)$ ;

**Exercice.** Soit une application linéaire:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y - z \\ 3x + 6y + 2z \\ -x - 2y + 4z \end{pmatrix}.$$

Trouver une base pour chacun de  $\text{Im}(T)$  et  $\mathcal{N}(T)$ .

**Solution.** On voit aisément que  $T$  est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = (A_1 \ A_2 \ A_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := B.$$

(1) D'après le théorème 5.2.7,  $\text{Im}(T) = \mathcal{C}(A)$ . Comme les pivots de  $B$  se trouvent dans les colonnes 1 et 3, d'après le théorème 4.3.9,  $\text{Im}(T)$  a pour base

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) D'après le théorème 5.2.7,  $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A)$ , l'espace-solution du système homogène  $AX = 0$ . Comme  $A$  se réduit à  $B$ , ce dernier système est équivalent au système homogène  $BX = 0$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ z &= 0 \\ 0z &= 0 \\ 0z &= 0, \end{aligned}$$

dont l'inconnue libre est  $y$ . Posant  $y = 1$ , on obtient une base de  $\mathcal{N}(T)$  comme suit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le résultat suivant nous donne un critère pour une application linéaire soit injective et soit surjective.

**5.2.8. Corollaire.** Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est linéaire définie par  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , alors

- (1)  $T$  est surjective si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = m$ .
- (2)  $T$  est injective si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = n$ .

**Exercice.** Déterminer si l'application linéaire suivante est injective ou surjective.

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + y \\ x - 3y \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On voit aisément que  $T$  est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{rg}(A) = 2$ , d'après le corollaire 5.2.8,  $T$  est injective, mais non surjective.

Le résultat suivant donne des propriétés importantes d'applications linéaires injectives, qui sera utile en infographie. On identifiera un vecteur avec son point d'arrivée.

**5.2.9. Proposition.** Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est linéaire injective, alors  $T$  envoie

- (1) un segment d'extrémités  $u_1, u_2$  au segment d'extrémités  $T(u_1), T(u_2)$ ;
- (2) un triangle de sommets  $u_1, u_2, u_3$  au triangle de sommets  $T(u_1), T(u_2), T(u_3)$ .

**Exercice.** Soit  $\Delta$  le triangle de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver l'image de  $\Delta$  par l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ y \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On voit que  $T$  est définie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{rg}(A) = 2$ , d'après le corollaire 5.2.8(1),  $T$  est injective. On calcule

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(u_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 5.2.9(2),  $T(\Delta)$  est le triangle de sommets

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 5.3. Transformations linéaires

Le but de cette section est d'étudier les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même. Partout dans cette section, on fixe  $E$  un espace vectoriel réel.

**5.3.1. Définition.** (1) Une application linéaire  $T : E \rightarrow E$  s'appelle une *transformation linéaire*.

(2) Une transformation linéaire bijective de  $E$  s'appelle un *automorphisme*.

**Exemple.** (1) L'application nulle

$$\mathbf{0} : E \rightarrow E : u \mapsto 0_E$$

est une transformation linéaire de  $E$ .



(2) L'application identité

$$\mathbb{1} : E \rightarrow E : u \mapsto u$$

est un automorphisme de  $E$ .

(3) La projection de  $\mathbb{R}^2$  sur l'axe des  $x$

$$p_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$ .

Comme d'habitude, la théorie des matrices est très utile pour étudier les transformations linéaires.

**5.3.2. Définition.** Soit  $T$  une transformation linéaire  $E$ . Soit  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une base de  $E$ . Comme  $T(u_1), \dots, T(u_n) \in E$ , on obtient une matrice de coordonnées

$$P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}} := [T]_{\{u_1, \dots, u_n\}},$$

appelée *matrice* de  $T$  dans  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

**Remarque.** Par définition de matrice de coordonnées, on a

$$(T(u_1), \dots, T(u_n)) = (u_1, \dots, u_n) [T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}.$$

Ceci est illustré par

$$(u_1, \dots, u_n) \xrightarrow{[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}} (T(u_1), \dots, T(u_n)).$$

**Exercice.** Considérons la projection de  $\mathbb{R}^2$  sur l'axe des  $x$  suivante:

$$p_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner sa matrice dans la base suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Solution.** Par définition, on a

$$[p_x]_{\{u_1, u_2\}} = P_{\{u_1, u_2\}}^{\{p_x(u_1), p_x(u_2)\}}.$$

On voit que

$$\begin{aligned} p_x(u_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\ p_x(u_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \end{aligned}$$

D'où

$$[p_x]_{\{u_1, u_2\}} = P_{\{u_1, u_2\}}^{\{p_x(u_1), p_x(u_2)\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**5.3.3. Lemme.** Soit une transformation linéaire

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto Au.$$

Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$[T]_{\{e_1, \dots, e_n\}} = A.$$

**Remarque.** Le lemme 5.3.3 dit que toute transformation linéaire de  $\mathbb{R}^n$  est définie par sa matrice dans la base canonique.

**Exercice.** Considérons la projection de  $\mathbb{R}^2$  sur l'axe des  $y$  suivante:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Trouver la matrice de  $p_y$  dans la base canonique  $\{e_1, e_2\}$ .

**Solution.** On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,  $p_y$  est la transformation linéaire suivante:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 5.3.3,

$$[p_y]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice d'une transformation linéaire change si l'on change la base. Ce changement est décrit dans le résultat suivant.

**5.3.4. Théorème.** Soit  $T$  une transformation linéaire de  $E$ . Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sont deux bases de  $E$ , alors

$$[T]_{\{v_1, \dots, v_n\}} = P^{-1}[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}P,$$

où  $P$  est la matrice de passage de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  à  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

**Remarque.** Ceci est illustré par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} (u_1, \dots, u_n) & \xrightarrow{[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}} & (T(u_1), \dots, T(u_n)) \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ (v_1, \dots, v_n) & \xrightarrow{[T]_{\{v_1, \dots, v_n\}}} & (T(v_1), \dots, T(v_n)). \end{array}$$

**Exercice.** Considérons la base de  $\mathbb{R}^2$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit  $S$  une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  telle que  $S(u_1) = u_1$  et  $S(u_2) = -u_2$ . Trouver sa formule en coordonnées canoniques.

**Solution.** On veut trouver  $[S]_{\{e_1, e_2\}}$ . Par l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} S(u_1) &= 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ S(u_2) &= 0 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$[S]_{\{u_1, u_2\}} = P_{\{u_1, u_2\}}^{\{S(u_1), S(u_2)\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $P$  est la matrice de passage de  $\{e_1, e_2\}$  à  $\{u_1, u_2\}$ , d'après le théorème 5.3.4,

$$[S]_{\{u_1, u_2\}} = P^{-1}[S]_{\{e_1, e_2\}}P.$$

D'où,

$$[S]_{\{e_1, e_2\}} = P[S]_{\{u_1, u_2\}}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donc, la formule en coordonnées canoniques de  $S$  est donnée par

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -4x - 3y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 5.2.4.

**5.3.5. Proposition.** Soient  $T$  et  $S$  des transformations linéaires de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $S \circ T$  est aussi transformations linéaires de  $\mathbb{R}^n$ . En outre, pour toute base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$[S \circ T]_{\{u_1, \dots, u_n\}} = [S]_{\{u_1, \dots, u_n\}} [T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}.$$

**Exercice.** Soit  $T$  la transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}.$$

Soit  $S$  une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  telle que  $S(u_1) = u_1$  et  $S(u_2) = -u_2$ , où

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trouver la formule de  $S \circ T$  en coordonnées canoniques.

**Solution.** D'après le lemme 5.3.3,  $S \circ T$  est définie par  $[S \circ T]_{\{e_1, e_2\}}$ . D'après la proposition 5.3.5,  $[S \circ T]_{\{e_1, e_2\}} = [S]_{\{e_1, e_2\}}[T]_{\{e_1, e_2\}}$ . D'après l'hypothèse, on a

$$[T]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et on a déjà trouvé que

$$[S]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$[S \circ T]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,  $S \circ T$  est de la forme:

$$S \circ T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x + 5y \\ -10x - 8y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une transformation linéaire est un automorphisme ou non; et si oui, comment trouver son inverse.

**5.3.6. Théorème.** Soit  $T$  une transformation linéaire de  $E$ . Pour toute base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $E$ , les trois conditions suivantes sont équivalentes.

- (1)  $T$  est un automorphisme.
- (2)  $[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}$  est inversible.
- (3)  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  est aussi une base de  $E$ .

Dans ce cas,  $[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}$  est la matrice de passage de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  à  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ , et  $T^{-1}$  est aussi un automorphisme avec

$$[T^{-1}]_{\{u_1, \dots, u_n\}} = ([T]_{\{u_1, \dots, u_n\}})^{-1}.$$

**Exercice.** Considérons l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ y \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que  $T$  est un automorphisme et donner  $T^{-1}$ .  
 (2) Trouver la matrice de passage de  $\{u_1, u_2\}$  à  $\{T(u_1), T(u_2)\}$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** (1) D'après le lemme 5.3.3, on voit que

$$[T]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := A.$$

Comme  $A$  est inversible, d'après le théorème 5.3.6,  $T$  est un automorphisme et

$$[T^{-1}]_{\{e_1, e_2\}} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,  $T^{-1}$  est de la forme:

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y \\ y \end{pmatrix}.$$

(2) D'après le théorème 5.3.6, la matrice de passage de  $\{u_1, u_2\}$  à  $\{T(u_1), T(u_2)\}$  est  $[T]_{\{u_1, u_2\}}$ . Comme la matrice de passage de  $\{e_1, e_2\}$  à  $\{u_1, u_2\}$  est

$$P = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 5.3.4, on a

$$[T]_{\{u_1, u_2\}} = P^{-1}[T]_{\{e_1, e_2\}}P = \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ -5 & -7 \end{pmatrix},$$

ce qui est la matrice de passage de  $\{u_1, u_2\}$  à  $\{T(u_1), T(u_2)\}$ . C'est-à-dire,

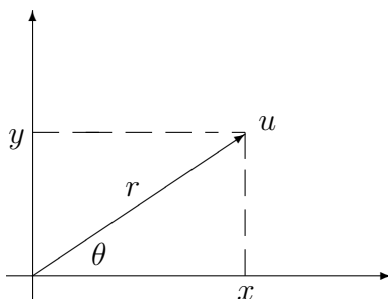
$$\begin{aligned} T(u_1) &= 19u_1 - 5u_2; \\ T(u_2) &= 27u_1 - 7u_2. \end{aligned}$$

#### 5.4. Rotations de $\mathbb{R}^2$

Cette section a pour but d'étudier un type spécial d'automorphismes du plan, c'est-à-dire, les rotations en 2D. On commence par un petit rappel de la trigonométrie. Étant donné un vecteur non nul

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

la longueur de  $u$  est  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et un argument  $\theta$  de  $u$  est un angle de l'axe des abscisses positif à  $u$ . Dans ce cas,  $u$  est représenté par le vecteur du plan suivant:



Maintenant, on définit

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ceci nous donne

$$u = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix},$$

appelé *forme géométrique* de  $u$ . En particulier, on voit aisément que le cercle unitaire se compose des vecteurs suivants:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Le tableau suivant donne les valeurs de sinus et de cosinus de certains angles spéciaux dans le premier quadrant.

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

**5.4.1. Proposition.** Si  $\theta, \phi$  sont des angles, alors

- (1)  $\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$ ;
- (2)  $\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$ ;
- (3)  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ;
- (4)  $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$ ;
- (5)  $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$ .

**Exemple.** (1) D'après la proposition 5.4.1(4) et (5), on a

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(2) Considérons la matrice suivante:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En vue de la proposition 5.4.1, on vérifie que  $A_\theta$  est inversible avec

$$A_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A_\theta^T.$$

En appliquant la proposition 5.4.1(4) et (5), on obtient le résultat suivant qui nous permet de trouver le sinus et le cosinus des angles spéciaux dans les autres quadrants.

**5.4.2. Proposition.** Si  $\theta$  est un angle, alors

$$(1) \begin{pmatrix} \cos(\pi - \theta) \\ \sin(\pi - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} \cos(\pi + \theta) \\ \sin(\pi + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

**Exercice.** Trouver un argument du vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Soit  $\theta \in [0, 2\pi]$  un argument de  $u$ . Alors

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{2}.$$

On cherche un angle  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  avec

$$\cos \phi = |\cos \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \phi = |\sin \theta| = \frac{1}{2}.$$

D'après le tableau ci-dessus,  $\phi = \frac{\pi}{6}$ . Comme  $u$  se trouve dans troisième quadrant, d'après la proposition 5.4.2,

$$\theta = \pi + \phi = \frac{7\pi}{6}.$$

Maintenant, on définira les rotations du plan.

**5.4.3. Définition.** Soit  $\theta$  un angle fixe. L'application

$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos(\phi + \theta) \\ r \sin(\phi + \theta) \end{pmatrix}$$

s'appelle *rotation* du plan d'un angle  $\theta$ .

**Exemple.** Comme

$$e_1 = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

D'après la définition, on a

$$\rho_\theta(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \rho_\theta(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le résultat nous donne la formule en coordonnées canoniques d'une rotation.

**5.4.4. Théorème.** La rotation  $\rho_\theta$  du plan d'un angle  $\theta$  est un automorphisme de la forme

$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est de la forme suivante:

$$\rho_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Exercice.** Soit  $\rho$  la rotation de  $\mathbb{R}^2$  d'un angle  $\frac{2\pi}{3}$ . Calculer  $\rho(u)$ , où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Remarquons que  $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ . D'après le théorème 5.4.4,

$$[\rho]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =: A.$$

D'où

$$\rho(u) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}.$$



## 5.5. Transformations affines et calibration de caméra

Le but de cette section est d'étudier certaines transformations non linéaires, qui sont représentables par une matrice si l'on utilise les coordonnées homogènes. On commence par les transformations affines.

**5.5.1. Définition.** Étant donné un vecteur  $B \in \mathbb{R}^n$ , l'application

$$T_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto u + B$$

s'appelle *translation* de la direction  $B$ .

**Remarque.** Une translation de la direction  $B$  est bijective; et elle est linéaire si, et seulement si,  $B$  est nul.

**Exemple.** La translation de  $\mathbb{R}^2$  de la direction

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

est l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3 \\ y - 4 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que toute transformation linéaire de  $\mathbb{R}^n$  est de la forme

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto Au,$$

où  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

**5.5.2. Définition.** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathbb{R}^n$ , alors l'application

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto Au + B$$

s'appelle *transformation affine* de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque.** (1) La transformation affine  $T$  est le composé de la transformation linéaire définie par  $A$  et la translation de la direction  $B$ .

(2) Si  $A = I_n$ , alors  $T$  est la translation de la direction  $B$ .

(3) Si  $B$  est nul, alors  $T$  est une transformation linéaire.

**Exercice.** Soit

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 3y - 2z + 2 \\ x - z + 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $T$  est une transformation affine.

**Démonstration.** On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 3y - 2z + 2 \\ x - z + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y - 2z \\ x - z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $T$  est une transformation affine de la forme

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant dit qu'une transformation affine sera donnée aussi par la multiplication à droite par une matrice lorsqu'on utilise les coordonnées homogènes au lieu de coordonnées canoniques.

**5.5.3. Théorème.** Soit une transformation affine suivante:

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto Au + B,$$

où  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  et  $B = (b_i)_{1 \times n}$ . Si  $u \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\widehat{T(u)} = \hat{A}\hat{u}$ , où

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

appelée *matrice en coordonnées homogènes* de  $T$ .

**Exemple.** Soit  $T = T_B \circ \rho_{\frac{\pi}{3}}$ , une transformation affine de  $\mathbb{R}^2$ , et soient

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

- (1) Donner la formule en coordonnées canoniques de  $T$ .
- (2) Calculer  $T(v)$ , en utilisant la matrice en coordonnées homogènes de  $T$ .

**Solution.** (1) D'après le théorème 5.4.4, la rotation  $\rho_{\frac{\pi}{3}}$  est définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$T(u) = T_B(\rho_{\frac{\pi}{3}}(u)) = T_B(Au) = Au + B.$$

D'où,  $T$  est de la forme

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\sqrt{3}y+6}{2} \\ \frac{\sqrt{3}x+y+10}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) D'après le théorème 5.5.3, la matrice en coordonnées homogènes de  $T$  est

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\widehat{T(v)} = \hat{A}\hat{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3\sqrt{3} \\ 8 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$T(v) = \begin{pmatrix} 2 - 3\sqrt{3} \\ 8 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Dans le traitement d'image, on utilise la *calibration de caméra*, ou bien la *projection perspective*, pour modéliser le processus de formation des images. Cette application est non linéaire mais représentable par la multiplication par une matrice en coordonnées homogènes. Dans ce modèle, l'espace  $\mathbb{R}^3$  sera repéré par un *repère caméra* tel que défini ci-dessous:

- (1) l'origine est le centre optique de la caméra;
- (2) l'axe des  $z$  pointe vers les objets;
- (3) l'axe des  $y$  pointe vers le haut;
- (4) l'axe des  $x$  est parallèle à la base de la caméra et pointe vers la gauche (en face des objets).

Dans la prise d'une photo, un vecteur (ou bien un point) de  $\mathbb{R}^3$  est projeté sur le plan image défini par  $z = -d$ , où  $d$  est la distance focale (c'est-à-dire, la distance entre le point optique et le plan image) de la caméra. On note

$$\mathcal{Z}_d = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{Z}_{\neq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0 \right\}.$$

**5.5.4. Définition.** La *projection perspective* de centre  $\mathbf{0}$  sur un plan affine  $\mathcal{Z}_d$ , avec  $d \neq 0$ , est l'application définie par

$$\mathcal{P}_d : \mathcal{Z}_{\neq 0} \rightarrow \mathcal{Z}_d : u \mapsto u^*,$$

où  $u^*$  est le point d'intersection de  $\mathcal{Z}_d$  et la droite vectorielle passant par  $u$  et l'origine  $\mathbf{0}$ .

Le résultat suivant nous dit comment calculer la projective perspective en utilisant les coordonnées homogènes.

**5.5.5. Théorème.** Soit  $\mathcal{P}_d$  la projection perspective de centre  $\mathbf{0}$  sur  $\mathcal{Z}_d$ , où  $d \neq 0$ . Pour tout  $u \in \mathcal{Z}_{\neq 0}$ , son image  $\mathcal{P}_d(u)$  a pour coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \hat{u},$$

où la matrice s'appelle *matrice en coordonnées homogènes* de  $\mathcal{P}_d$ .

**Exercice.** Donner la matrice en coordonnées homogènes de la projection perspective  $\mathcal{P}_{-1}$  et calculer l'image par cette projection du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** D'après le théorème 5.5.5, la matrice en coordonnées homogènes de  $\mathcal{P}_{-1}$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =: A.$$

Comme

$$A \cdot \hat{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

d'après le théorème 5.5.5, on a

$$\mathcal{P}_{-1}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

## 5.6. Exercices

1. Considérer l'application du déterminant

$$\det : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \det(A).$$

- (1) Déterminer, avec justification, si cette application est injective ou non.
- (2) Déterminer, avec justification, si cette application est surjective ou non.
- (3) Déterminer, avec justification, si cette application est bijective ou non.

2. Considérer l'application suivante

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 3 \end{pmatrix}$$

- (1) Vérifier que  $T$  est bijective et trouve son inverse  $T^{-1}$ .
- (2) Trouver l'image par  $T$  du triangle  $\Delta$  de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Considérer l'application suivante:

$$T : M_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : A \mapsto A^T + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que  $T$  est une application bijective.
- (2) Donner l'inverse  $T^{-1}$ .

4. Considérer l'application suivante

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer  $T(e_1)$  et  $T(e_2)$ , avec  $\{e_1, e_2\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Trouver un vecteur spécifique  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $T(u) \neq Au$ , où  $A$  est la matrice formée par  $T(e_1)$  et  $T(e_2)$ .
- (3) Déterminer, à l'aide du théorème 5.2.3, si  $T$  est linéaire ou non.

5. Dans chacun des cas suivants, vérifier que l'application  $T$  est non linéaire.

- (1)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 7 \\ y - 5 \end{pmatrix}.$

- (2)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y^2 \end{pmatrix}.$

6. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice qui définit l'application linéaire  $T$ .

$$(1) \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x \\ -5y \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x \\ 9y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x - 5y + z \end{pmatrix}.$$

7. Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire. Si  $T(u_1) = v_1$  et  $T(u_2) = v_2$ , calculer  $T(u)$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Indice:* D'abord, à l'aide du lemme 4.1.6, exprimer  $u = a_1 u_1 + a_2 u_2$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ; et ensuite, utiliser la linéarité de  $T$ .

8. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x \\ 7y \end{pmatrix}.$$

- (1) Donner la matrice qui définit  $T$ .
- (2) Donner l'image par  $T$  du disque unitaire

$$\mathcal{S}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

9. Considérer les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Donner la matrice de passage de  $\{u_1, u_2, u_3\}$  à la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

(3) À l'aide de la partie (2), trouver l'application linéaire  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  telle que

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. Considérons l'application linéaire

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que

$$S(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit l'application composée  $S \circ T$ .

(2) Donner la formule de  $S \circ T$  en coordonnées canoniques.

11. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit  $T$ .

(2) Donner une base de  $\text{Im}(T)$ .

(3) Donner une base de  $\mathcal{N}(T)$ .

12. Soit  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

où  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

(1) Trouver, à l'aide du théorème 5.2.3, la matrice qui définit  $T$ .

(2) Donner la dimension de  $\text{Im}(T)$  et déterminer si  $T$  est surjective ou non.

(3) Donner la dimension de  $\mathcal{N}(T)$  et déterminer si  $T$  est injective ou non.

13. Dans chacun des cas suivants, trouver une base pour chacun de  $\mathcal{N}(T)$  et  $\text{Im}(T)$ .

$$(1) \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y + 6z \\ -3x - 6y - 9z \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

14. Considérer l'application linéaire  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$ , où

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des cas ci-dessus, trouver la dimension de  $\mathcal{N}(T)$  et celle de  $\text{Im}(T)$ , et en déterminer si  $T$  est injective et si  $T$  est surjective.

15. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

- (1) Trouver la matrice qui définit  $T$ .
- (2) Vérifier, à l'aide du corollaire 5.2.8, que  $T$  est injective.
- (3) À l'aide de la proposition 5.2.9, donner l'image par  $T$  du triangle  $\Delta$  de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

16. Donner une application linéaire  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui envoie le segment d'extrémités

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en le segment d'extrémités

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



17. Dans chacun des cas suivants, trouver la transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est la matrice donnée.

$$(1) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y + z \\ 2x - y + 2z \\ 3x + 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

- (1) Trouver la matrice de  $T$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Donner une base pour chacun de  $\mathcal{N}(T)$  et  $\text{Im}(T)$ .
- (3) Donner la valeur de  $a$  pour que  $u \in \text{Im}(T)$ , où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (4) Donner la valeur de  $b$  pour que  $v \in \mathcal{N}(T)$ , où

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

19. Dans chacun des cas suivants, trouver la dimension de chacun de  $\text{Im}(T)$  et  $\mathcal{N}(T)$ , et en déterminer si  $T$  est un automorphisme ou non.

$$(1) \quad T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

- (2)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  linéaire telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad T(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. Considérer la projection de  $\mathbb{R}^2$  sur l'axe des  $y$  comme suit:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Donner, à l'aide du théorème 5.3.3, la matrice de  $p_y$  dans la base suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Trouver les coordonnées de  $u = 2u_1 - 5u_2$  et celles de  $p_y(u)$  dans la base  $\{u_1, u_2\}$ .

21. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x + y - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver la matrice de  $T$  dans la base de  $\mathbb{R}^3$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Indice:* D'abord, trouver la matrice de  $T$  dans la base canonique à l'aide du lemme 5.4.3; et ensuite, appliquer le théorème 5.4.4.

(2) Donner les coordonnées de  $T(u)$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Indice:* D'abord, trouver les coordonnées de  $u$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  à l'aide de la proposition 4.2.9, et ensuite; appliquer le théorème 5.4.5.

22. Trouver la transformation linéaire  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que  $T(u_1) = -u_1$  et  $T(u_2) = u_2$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Indice:* Vérifier que  $\{u_1, u_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

23. Trouver une transformation linéaire  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $T(u_1) = 2u_1$ ,  $T(u_2) = 3u_2$ , et  $T(u_3) = 4u_3$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Indice:* D'abord, vérifier que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et trouver la matrice de  $T$  dans cette base; et ensuite, trouver la matrice de  $T$  dans la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  à l'aide du théorème 5.4.4.

24. Dans chacun des suivants, déterminer si la transformation linéaire  $T$  est un automorphisme ou non; et si oui, trouver son inverse  $T^{-1}$ .

(1)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix};$

(2)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix}.$

25. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + 3y - z \\ 4x + 5y + 2z \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que  $T$  est un automorphisme.

(2) Calculer  $T^{-1}$ , l'inverse de  $T$ .

(3) Donner la matrice de  $T$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Donner la matrice de passage de la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  à la base  $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\}$ .

26. Dans chacun des cas suivants, trouver les valeurs de  $a$  pour que  $T$  soit un automorphisme.

(1)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ a & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est linéaire satisfaisant à la condition suivante:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T(e_2) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

27. Calculer

- (1)  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ ;      (2)  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ ;  
(3)  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ ;      (4)  $\cos \frac{17\pi}{12}$  et  $\sin \frac{17\pi}{12}$ .

28. Dans chacun des cas suivants, trouver un argument du vecteur donné.

- (1)  $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ;      (2)  $\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ ;      (3)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ;      (4)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

29. Pour tout angle  $\theta$ , on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Vérifier, pour tous angles  $\theta, \psi$ , que  $A_\theta A_\psi = A_{\theta+\psi}$ .

30. Soit  $\rho$  la rotation du plan d'un angle  $\frac{2\pi}{3}$ . Soit  $T$  la transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

avec  $\{e_1, e_2\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

- (1) Trouver la matrice de  $\rho \circ T$  et celle de  $T \circ \rho$  dans  $\{e_1, e_2\}$ .  
(2) Calculer l'image de  $u$  par  $\rho \circ T$  et celui par  $T \circ \rho$ , et en déterminer si  $\rho \circ T = T \circ \rho$  ou non, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

31. Considérer la projection perspective  $\mathcal{P}_{-3}$  de centre  $\mathbf{0}$  sur le plan affine  $\mathcal{Z}_{-3}$ . Soit  $\Delta$  le triangle de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer  $v_i = \mathcal{P}_{-3}(u_i)$ , pour  $i = 1, 2, 3$ .  
(2) Vérifier que l'image de  $\Delta$  par  $\mathcal{P}_{-3}$  est le triangle de sommets  $v_1, v_2, v_3$ .

*Indice:* D'après la proposition 4.4.7, tout  $u \in \Delta$  s'écrit

$$u = (1 - s - t)u_1 + su_2 + tu_3; 0 \leq s, t, 1 - s - t \leq 1.$$

D'abord, calculer  $\mathcal{P}_{-3}(u)$  à l'aide de la matrice en coordonnées homogènes de  $\mathcal{P}_{-3}$ .

Pour la partie (1), spécifier les valeurs  $(s, t) = (0, 0)$ ;  $(s, t) = (1, 0)$  et  $(s, t) = (0, 1)$ .

Pour la partie (2), vérifier que  $\mathcal{P}_{-3}(u) = (1 - s - t)v_1 + sv_2 + tv_3$ .

## Chapitre VI: Diagonalisation

Comme on a déjà vu, une transformation linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est complètement déterminée par sa matrice dans une base. Le but de ce chapitre est d'étudier quand on peut trouver une base dans laquelle la matrice de la transformation linéaire est diagonale. Comme les matrices d'une transformation linéaire dans deux bases sont semblables, ceci se ramène au problème quand une matrice carrée est semblable à une matrice diagonale. Pour ce faire, on a besoin de notions de valeurs propres et de vecteurs propres. En tant qu'application de valeurs propres en informatique, on parlera de l'algorithme PageRank.

### 6.1. Polynômes

On commence par un petit rappel de polynômes réels.

**6.1.1. Définition.** Un polynôme réel de degré  $n$  est une expression formelle

$$f(\lambda) = c_n \lambda^n + \cdots + c_1 \lambda + c_0,$$

où  $\lambda$  s'appelle *variable*, et  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  avec  $c_n \neq 0$  s'appellent *coefficients*. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on pose

$$f(a) = c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 \in \mathbb{R}.$$

On dit que  $a$  est une *racine* de  $f(\lambda)$  si  $f(a) = 0$ .

**Exemple.** Si  $f(\lambda) = 3\lambda^2 + 6$ , alors  $f(\lambda)$  n'a aucune racine réelle. En effet, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $f(a) = 3a^2 + 6 \geq 6$ .

**6.1.2. Proposition.** Soit  $f(\lambda)$  un polynôme réel de degré  $n$ . Alors  $a \in \mathbb{R}$  est une racine de  $f(\lambda)$  si, et seulement si,  $f(\lambda) = (\lambda - a)g(\lambda)$ , où  $g(\lambda)$  est un polynôme réel de degré  $n - 1$ . Par conséquent,

- (1)  $f(\lambda)$  admet au plus  $n$  racines réelles; et
- (2)  $f(\lambda)$  admet  $n$  racines réelles  $a_1, \dots, a_n$  (incluant les multiplicités) si, et seulement si,

$$f(\lambda) = c(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n),$$

où  $c$  est le coefficient de  $\lambda^n$ .

**Exemple.** Si  $f(\lambda) = 5(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$ , alors  $f(\lambda)$  admet trois racines 2, 2, 3.

Il n'y a pas de règle pour trouver les racines d'un polynôme réel général. Néanmoins, on a le résultat suivant pour les polynômes de degré deux.

**6.1.3. Proposition.** Soit un polynôme réel de degré deux:

$$f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \text{ où } a \neq 0.$$

Alors  $f(\lambda)$  admet une racine réelle si, et seulement si, le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ; et dans ce cas,  $f(\lambda)$  admet deux racines réelles suivantes:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

**Exemple.** Soit  $f(\lambda) = 2\lambda^2 + 6\lambda - 2$ . Comme  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8$ , d'après la proposition 6.1.3,  $f(\lambda)$  n'a aucune racine réelle. Par conséquent,  $f(\lambda)$  n'est pas factorisable sur  $\mathbb{R}$ .

Le résultat suivant est très pratique pour trouver des racines d'un polynôme entier.

**6.1.4. Proposition.** Soit un polynôme à coefficients entiers

$$f(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Si  $q \in \mathbb{Q}$  est une racine de  $f(\lambda)$ , alors  $q \in \mathbb{Z}$  est un diviseur de  $c_0$ .

**Exercice.** Factoriser  $f(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6$ .

**Solution.** D'abord, les diviseurs de 6 sont  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . Par essai-erreur, on trouve  $f(-1) = 0$ . En divisant  $f$  par  $\lambda - (-1) = \lambda + 1$ , on trouve  $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$ .

Considérons  $g(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ . Comme  $\Delta = 25 - 24 = 1$ . D'après la proposition 6.1.3,  $g(\lambda)$  a deux racines

$$\lambda_1 = \frac{-(-5) + 1}{2} = 3; \quad \lambda_2 = \frac{-(-5) - 1}{2} = 2.$$

D'où,  $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ . Par conséquent,  $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ .

## 6.2. Diagonalisation de matrices et de transformations linéaires

**6.2.1. Définition.** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible  $P \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  est diagonale.

**Remarque.** Toute matrice diagonale est diagonalisable.

**Exemple.** Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On voit que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après les propositions 1.1.9 et 1.1.11, on a

$$\left( A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \left( 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

D'où,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple conduit à la définition suivante.

**6.2.2. Définition.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  est une *valeur propre* de  $A$  s'il existe un vecteur non nul  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Au_0 = \lambda_0 u_0$ . Dans ce cas,  $u_0$  est dit *vecteur propre* associé à  $\lambda_0$ .

**Remarque.** (1) Un vecteur propre est non nul, mais une valeur propre peut être nulle.

(2) Si  $u_0$  est un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre  $\lambda_0$ , alors  $au_0$  l'est aussi pour tout nombre réel non nul  $a$ .

**Exemple.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0, et les deux vecteurs suivants le sont aussi: les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant dit qu'une matrice carrée est diagonalisable si elle possède assez de vecteurs propres linéairement indépendants.

**6.2.3. Théorème.** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  admet  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants  $u_1, \dots, u_n$ . Dans ce cas,  $P = (u_1 \cdots u_n)$  est inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où  $\lambda_i$  est la valeur propre à laquelle  $u_i$  est associé.

**Exemple.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a vu que  $A$  a deux vecteurs propres linéairement indépendants

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

associés aux valeurs propres 2, 3, respectivement. Comme  $\{u_1, u_2\}$  est libre,

$$P = (u_1 u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On va étudier comment trouver les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

**6.2.4. Définition.** Soient  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda$  une variable. On appelle

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

le *polynôme caractéristique* de  $A$ .

**Exercice.** Calculer  $\chi_A(\lambda)$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda).$$

De l'autre côté, on a vu que  $A$  a pour valeurs propres 2 et 3.



Voici le résultat pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée.

**6.2.5. Théorème.** Soient  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Les énoncés suivants sont équivalents.

- (1)  $\lambda_0$  est une valeur propre de  $A$ .
- (2)  $\lambda_0$  est une racine de  $\chi_A(\lambda)$ .
- (3)  $\text{rg}(A - \lambda_0 I_n) < n$ .

**Remarque.** Comme  $\chi_A(\lambda)$  est de degré  $n$ ,  $A$  a au plus  $n$  valeurs propres réelles.

**Exercice.** Trouver les valeurs propres réelles des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** (1) On calcule le polynôme caractéristique comme suit:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 & -9 \\ -2 & 6-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1-(L_2+L_3)}{=} \begin{vmatrix} 10-\lambda & \lambda-10 & \lambda-10 \\ -2 & 6-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_2+C_1, C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -8 \\ -1 & -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (10-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 24 - 24) = (10-\lambda)^2(0-\lambda). \end{aligned}$$

D'où, les valeurs propres de  $A$  sont 10 et 0.

(2) On a

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

ce qui n'a aucune racine réelle. Par conséquent,  $B$  n'a aucune valeur propre réelle.

Le résultat suivant nous dit comment trouver les vecteurs propres d'une matrice carrée associés à une valeur propre donnée.

**6.2.6. Théorème.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  dont  $\lambda_0$  est une valeur propre. Les énoncés suivants sont équivalents pour un vecteur  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ .

- (1)  $u_0$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_0$ ;
- (2)  $u_0$  est solution non nulle du système homogène  $(A - \lambda_0 I_n)X = 0$ ;
- (3)  $u_0$  est un vecteur non nul de  $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$ .

**Remarque.** On appelle  $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$  *espace propre* de  $A$  associé à  $\lambda_0$ . En outre,

(1)  $\dim \mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n) = n - \text{rg}(A - \lambda_0 I_n)$ , notée  $\text{mg}(\lambda_0)$  et appelé *multiplicité géométrique* de  $\lambda_0$ .

(2)  $\text{mg}(\lambda_0)$  est le plus grand nombre de vecteurs propres linéairement indépendants de  $A$  associés à  $\lambda_0$ .

(3) Une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$  est une famille libre maximale de vecteurs propres de  $A$  associés à  $\lambda_0$ .

**Exercice.** On a vu que 10 est une valeur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la multiplicité géométrique de la valeur propre 10.

(2) Donner une famille libre maximale de vecteurs propres de  $A$  associés à 10.

**Solution.** (1) D'après la définition,  $\text{mg}(10) = 3 - \text{rg}(A - 10I_3)$ . On échelonne

$$A - 10I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où,  $\text{mg}(10) = 2$ .

(2) Il s'agit de trouver une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ , c'est-à-dire, l'espace-solution du système homogène  $(A - 10I_3)X = 0$ . Ce dernier est équivalent au système homogène échelonné

$$x + 2y + 3z = 0,$$

dont les inconnues libres sont  $y, z$ . Posant  $y = 1, z = 0$ ; et  $y = 0, z = 1$ , on obtient une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$  comme suit

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il s'agit d'une famille libre maximale de vecteurs propres de  $A$  associés à 10.

On est prêt de donner un critère pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable et une méthode pour la diagonaliser si c'est possible.

**6.2.7. Théorème.** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(1)  $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{n_s}$ , où  $n_i > 0$  et  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$  lorsque  $i \neq j$ .

(2)  $\text{mg}(\lambda_i) = n_i$ , pour  $i = 1, \dots, s$ .

Dans ce cas, si  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$ , pour  $i = 1, \dots, s$ , alors

$$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_s$$

est une base de  $\mathbb{R}^n$  composée de vecteurs propres de  $A$ , qui forme une matrice inversible  $P$  telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag} \left\{ \overbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}^{n_s} \right\} := D$$

où la  $j$ -ième colonne de  $P$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la  $j$ -ième valeur propre de la diagonale de  $D$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .

**Exercice.** Vérifier si les matrices suivantes sont diagonalisables ou non.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** (1) On a  $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , qui ne se factorise pas en produit de facteurs de degré un sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $A$  n'est pas diagonalisable.

(2) On voit que  $\chi_B(\lambda) = (3 - \lambda)^2(4 - \lambda)$ . Ainsi la première condition énoncée dans le théorème précédent est vérifiée. En outre,  $\text{mg}(4) = 1$ , la multiplicité de  $4 - \lambda$  dans  $\chi_A(\lambda)$ . Mais, comme

$$B - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a  $\text{mg}(3) = 3 - \text{rg}(B - 3I_3) = 1 < 2$ , la multiplicité de  $3 - \lambda$  dans  $\chi_A(\lambda)$ . Donc  $B$  n'est pas diagonalisable.

**Exercice.** Donner une décomposition  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et  $D$  diagonale, où

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Le problème est de diagonaliser  $A$ . On a trouvé  $\chi_A(\lambda) = (10 - \lambda)^2(0 - \lambda)$ . Donc,  $A$  admet deux valeurs propres  $\lambda_1 = 10$  et  $\lambda_2 = 0$ .

(1) *Base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ .* On a déjà trouvé une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$  comme suit:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) *Base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$ .* Comme

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le système homogène  $(A - \lambda_1 I_3)X = 0$  est équivalent au système homogène échelonné

$$\begin{aligned} x + 2y - 7z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

dont l'inconnue libre est  $z$ . Posant  $z = 1$ , on a une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$  comme suit:

$$u_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On pose

$$P = (u_1 u_2 u_3) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := D.$$

Ceci donne une décomposition  $A = PDP^{-1}$ .

On conclut cette section avec la diagonalisation de transformation linéaire.

**6.2.8. Définition.** Une transformation linéaire  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite *diagonalisable* s'il existe une base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire,  $T(u_i) = \lambda_i u_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Dans ce cas, on dit aussi que  $T$  est un *changement d'échelle*.

Voici le critère et le procédé de la diagonalisation d'une transformation linéaire.

**6.2.9. Théorème.** Une transformation linéaire  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  est diagonalisable si, et seulement si, sa matrice  $A$  dans la base canonique est diagonalisable. Dans ce cas, si  $\{u_1, \dots, u_n\}$

est une base de  $\mathbb{R}^n$  composée de vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivement, alors

$$[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Exercice.** Diagonaliser la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 3x - 5y + 3z \\ 6x - 6y + 4z \end{pmatrix}.$$

**Solution.** D'abord,

$$[T]_{\{e_1, e_2, e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} := A.$$

D'après le théorème 6.2.9, on doit diagonaliser la matrice  $A$ . Pour ce faire, on calcule

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 + \lambda & 0 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_2 + C_1}{=} (\lambda + 2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 - \lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(-1) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda). \end{aligned}$$

D'où, les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = -2$  et  $\lambda_2 = 4$ .

(1) *Base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ .* On échelonne

$$A - (-2)I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice représente le système homogène échelonné

$$x - y + z = 0,$$

dont les inconnues libres sont  $y, z$ . Posant  $y = 1, z = 0$ ; et  $y = 0, z = 1$ , on obtient une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$  comme suit:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) *Base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$ .* On échelonne

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière représente le système homogène échelonné

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2y - z &= 0, \end{aligned}$$

dont  $z$  est la seule inconnue libre. Posant  $z = 2$ , on trouve une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$  comme suit:

$$\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après le théorème 6.2.9,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$[T]_{\{u_1, u_2, u_3\}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

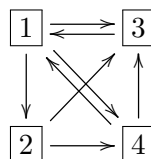
### 6.3. Algorithme PageRank

Un réseau de pages web se compose d'un nombre fini de pages et des liens entre eux. Un moteur de recherche affiche des pages web selon leur importance de telle sorte que la page la plus importante apparaît en premier. Le PageRank, inventé par Larry Page, est l'algorithme utilisé par Google pour classer des pages web. Pour établir le modèle mathématique, on doit représenter un réseau de pages web par un graphe orienté.

**6.3.1. Définition.** Un réseau de  $n$  pages web est représenté par un graphe orienté tel que défini ci-dessous:

- (1) Les pages sont représentées par les entiers  $1, 2, \dots, n$ .
- (2) Un lien de la page  $i$  vers la page  $j$  sera représenté par une flèche  $i \rightarrow j$ .

**Exemple.** Le graphe orienté suivant représente un réseau de 4 pages web et 8 liens.



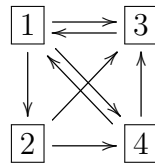
**6.3.2. Définition.** Soit  $W$  un réseau des pages web  $1, 2, \dots, n$ . Soit  $l_j$  le nombre de liens sortant de la page  $j$ , pour  $j = 1, 2, \dots, n$ . On définit *matrice des liens* de  $W$  comme suit:

$$L = (l_{ij})_{n \times n},$$

où

$$l_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, & \text{s'il existe un lien de la page } j \text{ vers la page } i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple.** Soit  $W$  le réseau de pages web représenté par le graphe suivant:



Comme  $l_1 = 3$ ,  $l_2 = 2$ ,  $l_3 = 1$  et  $l_4 = 2$ , la matrice des liens de  $W$  est donnée par

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme PageRank attribue à chaque page une valeur entre 0 et 1, appelée *score d'importance*, selon le principe suivant: le score d'importance d'une page est d'autant plus grand qu'elle a un grand nombre de pages importantes la référençant.

**6.3.3. Définition.** Soit  $W$  un réseau des pages web  $1, \dots, n$ . Soit  $l_j$  le nombre de liens sortant de la page  $j$ , pour  $j = 1, \dots, n$ . À chaque page  $i$ , on donne une valeur  $a_i$  avec  $0 < a_i < 1$ , appelée *score d'importance* de la page  $i$ , de sorte que  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  et

$$a_i = \sum_{\exists j \rightarrow i} \frac{a_j}{l_j} = \sum_{j=1}^n l_{ij} a_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

s'appelle un *vecteur des scores d'importance*.

Le résultat suivant donne l'interprétation d'un vecteur des scores d'importance.

**6.3.4. Proposition.** Soit  $W$  un réseau de pages web dont la matrice des liens est  $L$ . Un vecteur des scores d'importance de  $W$  est un vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre 1 dont les termes sont strictement positifs et somment à 1.

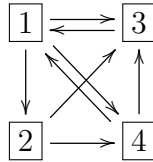
On étudiera quand un réseau de pages web admet un seul vecteur des scores.

**6.3.5. Définition.** Un réseau de pages web est dit *fortement connexe* si son graphe orienté admet un cycle orienté passant par toutes les pages.

**Remarque.** Si  $W$  est fortement connexe, alors toutes les deux pages  $i, j$  peuvent être rejointes par un chemin comme suit:

$$i \longrightarrow j_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_s \longrightarrow j.$$

**Exemple.** Le réseau de pages web suivant est fortement connexe:



En effet, on trouve un cycle orienté comme suit:

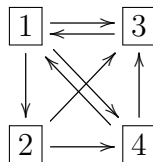
$$\boxed{1} \longrightarrow \boxed{2} \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow \boxed{3} \longrightarrow \boxed{1}.$$

**6.3.6. Théorème.** Soit  $W$  un réseau de pages web dont  $L$  est la matrice des liens. Si  $W$  est fortement connexe, alors  $L$  admet un vecteur propre  $u_0$  associé à la valeur 1 tel que

$$v = \frac{1}{a} u_0$$

est le seul vecteur des scores d'importance pour  $W$ , où  $a$  est la somme des termes de  $u_0$ .

**Exercice.** Donner un vecteur des scores d'importance du réseau de pages web suivant:



**Solution.** On voit que ce réseau est fortement connexe et sa matrice des liens est

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



D'abord, on cherche un vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire, une solution non nulle du système homogène  $(L - I_4)X = 0$ . Comme

$$L - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Cette dernière matrice représente le système homogène suivant

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_4 = 0 \\ 3x_2 & - & 2x_4 = 0 \\ 2x_3 & - & 3x_4 = 0, \end{array}$$

dont l'inconnue libre est  $x_4$ . Posant  $x_4 = 6$ , on obtient  $x_3 = 9$ ,  $x_2 = 4$  et  $x_1 = 12$ . Ceci donne un vecteur propre strictement positif de  $L$  associé à 1 comme suit:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Comme  $12 + 4 + 9 + 6 = 31$ , on voit que

$$\frac{1}{31} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

est le vecteur des scores d'importance de  $W$ . C'est-à-dire, les scores d'importance des pages sont donnés par

$$a_1 = \frac{12}{31}, a_2 = \frac{4}{31}, a_3 = \frac{9}{31}, a_4 = \frac{6}{31}.$$

## 6.4. Exercices

1. Factoriser les polynômes suivants si possible.

(1)  $x^2 + 2x + 2$ ;

(2)  $x^3 + x^2 - 2$ ;

(3)  $x^6 - 3x^3 + 2$ ;

(4)  $x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ ;

(5)  $x^3 - x^2 - x - 2$ .

2. (**MATLAB**) Trouver les racines de  $8x^4 - 30x^3 + 35x^2 - 15x + 2$ .
3. Considérer la matrice réelle suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que la valeur 2 est une valeur propre de  $A$ ; et calculer sa multiplicité géométrique.

4. Dans chacun des cas suivants, trouver la valeur réelle de  $a$  pour que la valeur 3 soit une valeur propre, et dans ce cas, calculer la multiplicité géométrique de 3.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer qu'une matrice carrée  $A$  est inversible si, et seulement si, la valeur 0 n'est pas valeur propre  $A$ .

6. Soit  $A$  une matrice inversible. Montrer que si  $\lambda_0$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\frac{1}{\lambda_0}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ .

7. Diagonaliser, si possible, la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Vérifier que la transformation linéaire suivante est un changement d'échelle :

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

9. Diagonaliser la transformation linéaire suivante :

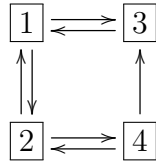
$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x - 4y - 8z \\ 4x + 6y + 4z \\ 6x + 4y + 10z \end{pmatrix}.$$

10. (**MATLAB**) Considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

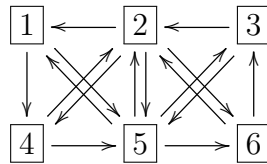
- (1) Trouver le polynôme caractéristique de  $A$ .
- (2) Trouver les valeurs propres de  $A$ .
- (3) Donner une décomposition  $A = PDP^{-1}$ , avec  $P$  inversible et  $D$  diagonale.

11. Soit  $W$  un réseau de pages web représenté par le graphe suivant:



- (1) Donner la matrice des liens  $L$  de  $W$ .
- (2) Vérifier que  $W$  est fortement connexe.
- (3) Donner le vecteur des scores d'importance de  $W$ .

12. (**MATLAB**) Donner le vecteur des scores d'importance du réseau des pages web suivant:



## Chapitre VII: Espaces euclidiens

Outre la structure d'espace vectoriel réel, le plan admet une géométrie euclidienne qui mesure la longueur, la distance, et l'angle de vecteurs. Le but de ce chapitre est de généraliser ces notions aux espaces vectoriels réels de dimensions supérieures.

### 7.1. Produit scalaire

La géométrie euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  est basée sur la notion de produit scalaire tel que défini ci-dessous.

**7.1.1. Théorème.** Le *produit scalaire* sur  $\mathbb{R}^n$  est, par définition, la fonction de deux variables suivante:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle := u^T v,$$

qui est bilinéaire, symétrique et défini positif, c'est-à-dire, pour  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

- (1)  $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$ ;  $\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$ ;
- (2)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ;
- (3)  $\langle u, u \rangle$  est strictement positif pour tout  $u \neq \mathbf{0}$ .

**Remarque.** Muni du produit scalaire, l'espace réel  $\mathbb{R}^n$  s'appelle *espace euclidien*.

**Exemple.** Si

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

alors

$$\langle u, v \rangle = u^T v = -2 + 3 - 6 = -5.$$

On généralise la notion de la longueur d'un vecteur du plan comme suit.

**7.1.2. Définition.** Pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ , on définit la *longueur* de  $u$  comme étant

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

un nombre réel non négatif. En outre, un vecteur de longueur 1 est dit *unitaire*.

Le résultat suivant est évident.

**7.1.3. Lemme.** Soient  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$ .  
 (2)  $u \neq \mathbf{0}$  si, et seulement si,  $\|u\| \neq 0$ .  
 (3) Si  $u \neq \mathbf{0}$ , alors  $\frac{u}{\|u\|}$  est unitaire, appelé le vecteur unitaire de *même direction* que  $u$ .

**Exercice.** Donner le vecteur unitaire de même direction que le vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Solution.** Comme  $\|u\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{29}$ , le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{29}} \\ -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

est le vecteur unitaire de même direction que  $u$ .

**7.1.4. Définition.** Pour tous  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , on définit *distance* entre  $u$  et  $v$  comme étant

$$d(u, v) := \|u - v\|.$$

**Exercice.** Calculer la distance entre les vecteurs suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Solution.** D'après la définition, on a

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}.$$

La longueur de vecteur satisfait à une inégalité importante énoncées ci-dessous.

**7.1.5. Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Si  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de généraliser la notion d'un angle dans le plan comme suit.

**7.1.6. Définition.** Soient  $u, v \in \mathbb{R}^n$  tous non nuls. Comme

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1,$$

il existe un unique  $\theta \in [0, \pi]$  tel que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

On appelle  $\theta$  *angle non orienté* entre  $u$  et  $v$ .

**Exercice.** Trouver l'angle non-orienté  $\theta$  entre les vecteurs suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

**Solution.** Par définition, on a

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

## 7.2. Orthogonalité

**7.2.1. Définition.** Deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{R}^n$  sont dits *orthogonaux*, noté  $u \perp v$ , si  $\langle u, v \rangle = 0$ .

**Remarque.** (1) Si  $u \in \mathbb{R}^n$ , alors  $u \perp \mathbf{0}$ .

(2) Deux vecteurs non nuls  $u, v \in \mathbb{R}^n$  sont orthogonaux si, et seulement si, l'angle non orienté entre eux est  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exemple.** Les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^4$  sont orthogonaux:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**7.2.2. Lemme.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v, \text{ pour tout } v \in F\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , appelé *orthogonal* de  $F$ .

**Exercice.** Soit  $D_x$  l'axe des  $x$  de  $\mathbb{R}^3$ . Vérifier que  $D_x^\perp = P_{y,z}$ , le plan des  $y, z$ .

**Démonstration.** D'abord, tout  $v \in P_{y,z}$  s'écrit

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D_x,$$

on a  $\langle u, v \rangle = 0$ . Ainsi  $v \in D_x^\perp$ . D'où  $P_{y,z} \subseteq D_x^\perp$ . Réciproquement, soit

$$w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in D_x^\perp.$$

Comme  $e_1 \in D_x$ , par définition,

$$0 = \langle w, e_1 \rangle = a.$$

Donc,  $w \in P_{y,z}$ . Par conséquent,  $D_x^\perp \subseteq P_{y,z}$ . Cela donne  $D_x^\perp = P_{y,z}$ . En outre, on remarque

$$\dim(D_x) + \dim(D_x^\perp) = 1 + 2 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Le résultat nous dit en particulier comment calculer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel lorsqu'un ensemble des générateurs est connu.

**7.2.3. Théorème.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

- (1)  $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$ .
- (2)  $(F^\perp)^\perp = F$ .
- (3) Si  $F$  est engendré par  $v_1, \dots, v_r$ , alors

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v_i, i = 1, \dots, r\}.$$

**Exercice.** Soit  $\ell$  la droite vectorielle définie par  $2x - y = 0$ . Trouver  $\ell^\perp$ .

**Solution.** Par hypothèse,  $\ell$  est l'espace-solution du système homogène

$$2x - y = 0,$$

dont l'inconnue libre est  $y$ . Posant  $y = 2$ , on obtient une base de  $\ell$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

En particulier,  $\ell$  est engendrée par  $u_1$ . Pour tout

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

d'après le théorème 7.2.3(3),  $v \in \ell^\perp$  si, et seulement si,  $\langle v, u_1 \rangle = 0$  si, et seulement si,  $x + 2y = 0$ . C'est-à-dire,  $\ell^\perp$  est la droite vectorielle définie par l'équation  $x + 2y = 0$ .

Plus généralement, on a la notion suivante.

**7.2.4. Définition.** Une famille  $\{u_1, \dots, u_r\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est dite

- (1) *orthogonale* si  $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ , pour tous  $1 \leq i, j \leq r$  avec  $i \neq j$ ;
- (2) *orthonormée* si, pour tous  $1 \leq i, j \leq r$ , on a

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j; \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

**Remarque.** Une famille orthonormée est une famille orthogonale de vecteurs unitaires.

**Exemple.** (1) Pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ , la famille  $\{u\}$  est orthogonale.

(2) Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

est orthogonale, mais non orthonormée. En outre, la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

est orthonormée.

Le résultat suivant est pratique pour déterminer une famille de vecteurs est orthogonale ou orthonormée.

**7.2.5. Proposition.** Si  $A = (A_1 \cdots A_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  est partagée en colonnes, alors

- (1)  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est orthogonale si, et seulement si,  $A^T A$  est diagonale;
- (2)  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est orthonormée si, et seulement si,  $A^T A = I_n$ .

**Exercice.** Vérifier que la famille

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



est orthogonale, mais non orthonormée.

**Démonstration.** Posons

$$A = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

d'après la proposition 7.2.5,  $\{u_1, u_2\}$  est orthogonale, mais non orthonormée.

Le résultat suivant nous dit, en particulier, comment obtenir une famille orthonormée à partir d'une famille orthogonale.

**7.2.6. Lemme.** Soit  $\{u_1, \dots, u_r\}$  une famille orthogonale de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Si les  $u_i$  sont tous non nuls, alors  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est libre, qui induit une famille orthonormée

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_r}{\|u_r\|} \right\}.$$

**Remarque.** En générale, une famille orthogonale n'est pas nécessairement libre. Cependant, une famille orthonormée est toujours libre.

**Exemple.** Considérer la famille

$$\left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme  $\langle u, v \rangle = 0$ , elle est orthogonale. Comme  $u, v$  sont tous non nuls, elle est libre. En outre, les vecteurs

$$\frac{u}{\|u\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

forment une famille orthonormée.

**7.2.7. Définition.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Une base de  $F$  est dite *orthogonale* ou *orthonormée* si elle est une famille orthogonale ou orthonormée, respectivement.

**Exemple.** La base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthonormée.

**Exercice.** Vérifier que le plan

$$P_{x,y} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

a pour base orthonormée

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Démonstration.** Comme  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  et  $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ , on voit que  $\{e_1, e_2\}$  est une famille orthonormée. En particulier, elle est libre. En suite, tout

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in P_{x,y}$$

s'écrit  $u = ae_1 + be_2$ . Ainsi  $\{e_1, e_2\}$  est une base, et donc, une base orthonormée, de  $P_{x,y}$ .

**Exercice.** Vérifier que  $\mathbb{R}^2$  a pour base orthonormée

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

**Solution.** Considérons

$$B = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme  $B^T B = I_2$ , d'après la proposition 7.2.5(2), la famille  $\{u_1, u_2\}$  est orthonormée, et donc, libre. En particulier, Comme  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , d'après le théorème 4.1.15,  $\{u_1, u_2\}$  est une base, et donc, une base orthonormée, de  $\mathbb{R}^2$ .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 7.2.6.

**7.2.8. Corollaire.** Si  $D$  est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^n$  engendrée par un vecteur  $u$ , alors  $D$  a pour base orthonormée

$$\left\{ \frac{u}{\|u\|} \right\}.$$

**Exemple.** Si  $D$  est la droite vectorielle passant par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors  $D$  a pour base orthonormée

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**7.2.9. Définition.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , dont  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est une base orthonormée. Pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ , on définit sa *projection orthogonale* sur  $F$  par

$$\text{proj}_F v = \langle u_1, v \rangle u_1 + \dots + \langle u_r, v \rangle u_r.$$

**Exemple.** Soit  $P_{xy}$  le plan des  $x, y$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont  $\{e_1, e_2\}$  est une base orthonormée. Pour tout

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

on voit que

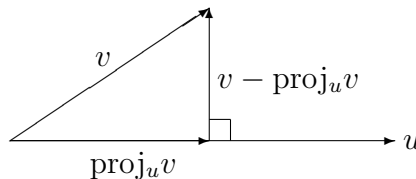
$$\text{proj}_{P_{x,y}} v = \langle e_1, v \rangle e_1 + \langle e_2, v \rangle e_2 = xe_1 + ye_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère un cas particulier de la projection orthogonale sur une droite.

**7.2.10. Proposition.** Soit  $D$  une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^n$  engendrée par un vecteur  $u$ . Si  $v \in \mathbb{R}^n$ , alors

- (1)  $\text{proj}_D v = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ ;
- (2)  $v - \text{proj}_D v \in D^\perp$ .

**Remarque.** On écrit  $\text{proj}_u v = \text{proj}_D v$ , appelé *projection orthogonale* de  $v$  sur  $u$ . Ceci est illustrée par le diagramme suivant:



**Exercice.** Considérer les vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $u \perp (v - \text{proj}_u v)$ .

**Solution.** Par définition, on a

$$\text{proj}_u v = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{2}{6} u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v - \text{proj}_u v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\langle u, v - \text{proj}_u v \rangle = \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Le résultat suivant ramasse les propriétés de projection orthogonale.

**7.2.11. Théorème.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , dont  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est une base orthonormée. Si  $v \in \mathbb{R}^n$ , alors

- (1)  $v - \text{proj}_F v \in F^\perp$ ;
- (2)  $v \in F$  si, et seulement si,  $v = \text{proj}_F v$ , c'est-à-dire,

$$v = \langle u_1, v \rangle u_1 + \dots + \langle u_r, v \rangle u_r.$$

**Remarque.** En particulier, le théorème 7.2.11(2) donne une méthode facile à trouver les coordonnées d'un vecteur de  $F$  dans la base orthonormée  $\{u_1, \dots, u_r\}$ .

**Exercice.** Considérer les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Trouver la colonne des coordonnées de  $v$  dans la base orthonormée  $\{u_1, u_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Solution.** On a vu que  $\{u_1, u_2\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ . Comme  $v \in \mathbb{R}^2$ , d'après le Théorème 7.2.11(3), on a

$$v = \text{proj}_{\mathbb{R}^2} v = \langle u_1, v \rangle u_1 + \langle u_2, v \rangle u_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} u_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2.$$

Ainsi

$$P_{\{u_1, u_2\}}^{\{v\}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant affirme en particulier que tout sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  admet une base orthonormée.

**7.2.12. Procédé de Gram-Schmidt.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , dont  $\{u_1, \dots, u_r\}$  est une base. Si l'on pose successivement

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1; \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1; \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2; \\
&\vdots \\
v_r &= u_r - \frac{\langle v_1, u_r \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_r \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \dots - \frac{\langle v_{r-1}, u_r \rangle}{\langle v_{r-1}, v_{r-1} \rangle} v_{r-1},
\end{aligned}$$

alors  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  est une base orthogonale de  $F$ , et donc

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_r}{\|v_r\|} \right\}$$

est une base orthonormée de  $F$ .

**Exercice.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Donner une base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$ .
- (2) Calculer  $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)} v$ .
- (3) Déterminer si  $v \in \mathcal{C}(A)$  ou non.

**Solution.** Comme  $\text{rg}(A) = 3$ , d'après la proposition 4.3.9(3),  $\mathcal{C}(A)$  a pour base

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (1) Posons  $B_1 = A_1$ , et calculons

$$\langle B_1, B_1 \rangle = 2, \quad \langle B_1, A_2 \rangle = 1, \quad \langle B_1, A_3 \rangle = 0.$$

- (2) Posons

$$B_2 = A_2 - \frac{\langle B_1, A_2 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 = A_2 - \frac{1}{2} B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et calculons

$$\langle B_2, B_2 \rangle = \frac{5}{2}, \quad \langle B_2, A_3 \rangle = 1.$$

(3) Posons

$$B_3 = A_3 - \frac{\langle B_1, A_3 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 - \frac{\langle B_2, A_3 \rangle}{\langle B_2, B_2 \rangle} B_2 = A_3 - \frac{2}{5} B_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

et calculons

$$\langle B_3, B_3 \rangle = \frac{3}{5}.$$

Cela nous donne une base orthogonale  $\{B_1, B_2, B_3\}$  de  $\mathcal{C}(A)$ . Posant

$$C_1 = \frac{B_1}{\|B_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, C_3 = \frac{B_3}{\|B_3\|} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

d'après le lemme 7.2.6, on obtient une base orthonormée  $\{C_1, C_2, C_3\}$  de  $\mathcal{C}(A)$ . Enfin,

$$\langle C_1, v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \langle C_2, v \rangle = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \langle C_3, v \rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

D'après la définition 7.2.9, on a

$$\text{proj}_{\mathcal{C}(A)} v = \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} C_2 + \frac{1}{\sqrt{15}} C_3 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)} v \neq v$ , d'après le théorème 7.2.11(2),  $v \notin \mathcal{C}(A)$ .

Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  de rang  $n$ . D'après la proposition 4.3.9, les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathcal{C}(A)$ . En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à cette base, on obtient une base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$ . En vue de la construction du Gram-Schmidt, on obtient le résultat suivant.

**7.2.13. Théorème.** Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  de rang  $n$ . Soit  $\{C_1, \dots, C_n\}$  la base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$  obtenue en appliquant Gram-Schmidt aux colonnes de  $A$ . Si l'on pose  $Q = (C_1 \cdots C_n)$ , alors  $Q^T Q = I_n$ , et  $R = Q^T A$  est triangulaire supérieure de type  $n \times n$  telle que

$$A = QR,$$

appelée *décomposition QR* de  $A$ .

**Exercice.** Donner une décomposition QR de la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On a trouvé, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt aux colonnes de  $A$ , une base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$  suivante:

$$\left\{ C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, C_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Posons

$$Q = (C_1 \ C_2 \ C_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} \sqrt{15} & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{15} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure telle que

$$A = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}.$$

### 7.3. Géométrie analytique

Le but de cette section est d'appliquer les résultats de la section précédente pour étudier la géométrie de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $P$  un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . D'après le théorème 7.2.3(1),  $P^\perp$  est de dimension 1, c'est-à-dire, une droite vectorielle engendré par un vecteur non nul. Cette observation conduit à la notion suivante.

**7.3.1. Définition.** Soit  $P$  un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Un vecteur non nul de  $P^\perp$  s'appelle *vecteur normal* à  $P$ .

Le résultat suivant sera utile pour trouver l'équation d'un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**7.3.2. Proposition.** Un plan vectoriel  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  est défini par l'équation

$$ax + by + cz = 0$$

si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à  $P$ .

On va donner une méthode pour trouver un vecteur normal à un plan vectoriel, en utilisant la notion du produit vectoriel tel que défini ci-dessous.

**7.3.3. Définition.** Soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Pour

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

on définit le *produit vectoriel* de  $u$  et  $v$  par

$$u \wedge v := (y_1 z_2 - y_2 z_1)e_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)e_3 \in \mathbb{R}^3,$$

c'est-à-dire,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & e_1 \\ y_1 & y_2 & e_2 \\ z_1 & z_2 & e_3 \end{vmatrix},$$

un déterminant formel développé suivant la dernière colonne.

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 2 & 1 & e_2 \\ 3 & 1 & e_3 \end{vmatrix} = -e_1 + e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On rassemble des propriétés élémentaires du produit vectoriel dans le résultat suivant.

**7.3.4. Proposition.** Soient  $u, v$  des vecteurs non co-linéaires de  $\mathbb{R}^3$ .

(1)  $u \wedge v = -(v \wedge u)$ .



- (2)  $u \wedge v$  est un vecteur normal au plan vectoriel engendré par  $u$  et  $v$ .  
 (3)  $\det(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 > 0$ .

**Exercice.** Donner une équation du plan vectoriel  $P$  engendré par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Solution.** On a vu que

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ce qui est normal à  $P$  d'après la proposition 7.3.4. Ainsi,  $P$  est défini par l'équation suivante:

$$-x + 2y - z = 0.$$

En conséquence de la proposition 7.3.4, on obtient une méthode suivante pour plonger un vecteur non nul dans une base orthogonale.

**7.3.5. Corollaire.** Soit  $L$  une droite vectorielle engendrée par un vecteur  $u$ . Si  $v \in \mathbb{R}^3$  est non nul avec  $\langle u, v \rangle = 0$  et  $w = u \wedge v$ , alors

- (1)  $\{v, w\}$  est une base orthogonale de  $L^\perp$ ;  
 (2)  $\{u, v, w\}$  est base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$  avec  $\det(u, v, u \wedge v) > 0$ .

**Exemple.** Prolonger  $u$  en une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ , où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Les vecteurs orthogonaux à  $u$  sont les solutions de l'équation suivante:

$$x + y + z = 0.$$

Posant  $y = 1$  et  $z = 0$ , on trouve  $x = -1$ . Ceci donne un vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\langle v, u \rangle = 0$ . Maintenant, calculons

$$w = u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous donne une base orthogonale  $\{u, v, w\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . En outre,  $\det(uvw) = 6$ .

On conclut cette section par la notion d'un angle orienté entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

**7.3.6. Définition.** Soit  $P$  un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  auquel  $w$  est un vecteur normal. Si  $u, v \in P$  sont non nuls, alors un angle de  $u$  à  $v$  orienté par  $w$  est un angle  $\theta$  tel que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\det(uvw)}{\|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|}.$$

**Exercice.** Donner un angle  $\theta$  de  $u$  à  $v$  orienté par  $v \wedge u$ , où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Solution.** D'abord,  $\langle u, v \rangle = -1$ ,  $\|u\| = \sqrt{2}$  et  $\|v\| = \sqrt{2}$ . D'où

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = -\frac{1}{2}.$$

En suite,

$$w = v \wedge u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

avec  $\|w\| = \sqrt{3}$ . Comme

$$\det(uvw) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

on a

$$\sin \theta = \frac{\det(uvw)}{\|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

C'est-à-dire,

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

## 7.4. Matrices orthogonales

Le but de cette section est d'étudier une classe importante de matrices, appelées *matrice orthogonales*. En appliquant la proposition 7.2.5(2), le lemme 7.2.6 et le théorème 4.1.15, on a le résultat suivant.

**7.4.1. Théorème.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , dont les colonnes sont  $A_1, \dots, A_n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1)  $A^T A = I_n$ .
- (2)  $A$  est inversible avec  $A^{-1} = A^T$ .
- (3)  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans ce cas, on dit que  $A$  est *orthogonale*.

**Remarque.** Soit  $A$  une matrice orthogonale.

- (1) Si l'on permute des colonnes de  $A$ , la matrice résultante est orthogonale.
- (2) Si l'on multiplie une colonne de  $A$  par  $-1$ , la matrice résultante est orthogonale.

**Exemple.** (1) Une matrice identité est orthogonale.

(2) Pour tout angle  $\theta$ , les matrices suivantes sont orthogonales:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

On ramasse des propriétés de matrices orthogonales dans le résultat suivant.

**7.4.2. Proposition.** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

- (1) Si  $A$  est orthogonale, alors  $A^T$  est orthogonale.
- (2) Si  $A, B$  sont orthogonales, alors  $AB$  est orthogonale.

**Remarque.** Lorsqu'on permute des lignes d'une matrice orthogonale, la matrice résultante est orthogonale.

**Exemple.** Pour tout angle  $\theta$ , les matrices suivantes sont orthogonales:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 7.2.13.

**7.4.3. Corollaire.** Si  $A$  est une matrice inversible, alors

$$A = QR,$$

où  $Q$  est orthogonale et  $R$  est triangulaire supérieure.

Le résultat suivant, un cas particulier des théorèmes 4.2.9 et 4.2.10, nous dit comment calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée et comment trouver la matrice de passage entre deux bases orthonormées.

**7.4.4. Théorème.** Soit  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Pour tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{u\}} = (u_1 \cdots u_n)^T u.$$

(2) Des vecteurs  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  forment une base orthonormée si, et seulement si,  $P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_n\}}$  est orthogonale; et dans ce cas,

$$P_{\{u_1, \dots, u_n\}}^{\{v_1, \dots, v_n\}} = (u_1 \cdots u_n)^T (v_1 \cdots v_n).$$

**Exercice.** Considérons deux bases orthonormées de  $\mathbb{R}^2$  suivantes:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Donner les coordonnées dans la base  $\{u_1, u_2\}$  du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Donner la matrice de passage de  $\{u_1, u_2\}$  à  $\{v_1, v_2\}$ .

**Solution.** (1) D'après la proposition 7.4.4(1), on a

$$P_{\{u_1, u_2\}}^{\{u\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(2) D'après le théorème 7.4.4(2), la matrice de passage de  $\{u_1, u_2\}$  à  $\{v_1, v_2\}$  est

$$(u_1 \ u_2)^T (v_1 \ v_2) = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 1 & -\sqrt{3} - 1 \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ce qui est orthogonale d'après le lemme 7.4.4(2).

## 7.5. Matrices symétriques

Le but de cette section est d'étudier les matrices symétriques. On montrera que toute matrice symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale.

**7.5.1. Proposition.** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique, alors

- (1)  $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  ;
- (2) deux vecteurs propres de  $A$  associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Voici le procédé de la diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale, qui sera utile dans la mécanique quantique.

**7.5.2. Théorème de l'axe principal.** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique, alors il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^{-1}AP = P^TAP$  est diagonale, où  $P$  est trouvée de la façon suivante.

- (1) On factorise  $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{n_s}$  avec  $n_i > 0$  et  $\lambda_i \neq \lambda_j$  lorsque  $i \neq j$ .
- (2) Pour chaque  $i = 1, \dots, s$ , on trouve
  - (i) une base  $\mathcal{B}_i$  de  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$ , en résolvant  $(A - \lambda_i I_n)X = 0$ .
  - (ii) une base orthonormée  $\mathcal{O}_i$  de  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$ , en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à  $\mathcal{B}_i$ .
- (3) Alors  $\mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_s$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , dont les vecteurs forment une matrice orthogonale  $P$  telle que

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag} \left\{ \overbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}^{n_s} \right\}.$$

**Exercice.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donner une décomposition  $A = PDP^T$ , où  $P$  est orthogonale et  $D$  est diagonale.

**Solution.** D'abord, on calcule

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1+\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ 4 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = (-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-8) = (1+\lambda)^2(8-\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi  $A$  a deux valeurs propres  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 8$ .

(a) Base orthonormée de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ .

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice représente un système homogène

$$2x + y + 2z = 0,$$

dont les inconnues sont  $y$  et  $z$ .

Posant  $y = 2$  et  $z = 0$ , on obtient  $x = -1$ .

Posant  $y = 0$  et  $z = 1$ , on obtient  $x = -1$ .

Ceci donne une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On appliquera le procédé de Gram-Schmidt à cette base.

(i) Posons  $v_1 = u_1$  et calculons  $\langle v_1, v_1 \rangle = 5$  et  $\langle v_1, u_2 \rangle = 1$ .

(ii) Posons

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = u_2 - \frac{1}{5} u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et calculons  $\langle v_2, v_2 \rangle = \frac{9}{5}$ .

Maintenant, posons

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne une base orthonormée  $\{w_1, w_2\}$  de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ .

(b) Base orthonormée de  $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$ .

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice représente un système homogène

$$\begin{array}{rcl} x & - & z = 0 \\ 2y & - & z = 0. \end{array}$$

Posant  $z = 2$ , on obtient  $y = 1$  et  $x = 2$ . Ceci donne une base de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

qui est orthogonale. En la normalisant, on obtient une base orthonormée de  $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ :

$$\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Enfin, on obtient une matrice orthogonale

$$P = (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

telle que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne une décomposition

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

## 7.6. Transformations orthogonales

Le but de cette section est d'étudier une classe spéciale d'automorphismes de  $\mathbb{R}^n$ , soit les transformations orthogonales telles que définies ci-dessous.

**7.6.1. Définition.** Une transformation linéaire  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite *orthogonale* si

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

pour tous vecteurs  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple.** L'application identité

$$\mathbb{1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto u$$

est évidemment orthogonale.

Voici des propriétés des transformations orthogonales.

**7.6.2. Proposition.** Soit  $T$  une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Si  $u \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\|T(u)\| = \|u\|$ .

(2) Si  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , alors  $d(T(u), T(v)) = d(u, v)$ .

(3) Si  $u, v \in \mathbb{R}^n$  sont non nuls, alors l'angle non orienté entre  $T(u)$ ,  $T(v)$  est égal à celui entre  $u, v$ .

**Remarque.** Une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $2 \leq n \leq 3$ , transforme les rectangles en rectangles, et les carrés en carrés.

Le résultat suivant donne une méthode pour vérifier si une transformation linéaire est orthogonale ou non.

**7.6.3. Théorème.** Soit  $T$  une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(1)  $T$  est orthogonale.

(2)  $[T]_{\{u_1, \dots, u_n\}}$  est orthogonale.

(3)  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque.** Une transformation orthogonale est un automorphisme.

**Exemple.** La rotation  $\rho_\theta$  d'un angle  $\theta$  du plan est orthogonale. En effet,  $\{e_1, e_2\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$[\rho]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

ce qui est orthogonale. D'après le théorème 7.6.3,  $\rho_\theta$  est orthogonale.

On définira les rotations de  $\mathbb{R}^3$ , qui sont orthogonales.

**7.6.4. Définition.** Soit  $L$  une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  engendrée par un vecteur  $u$ , ce qui est normal au plan  $L^\perp$ . La rotation  $\rho_{\theta, u}$  autour de  $L$  d'angle  $\theta$  orienté par  $u$  est une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^3$  satisfaisant les deux conditions suivantes.

(1) Si  $v \in L$ , alors  $\rho_{\theta, u}(v) = v$ .

(2) Si  $v \in L^\perp$  est non nul, alors  $\rho_{\theta, u}(v) \in L^\perp$  est tel que

(a)  $\|v\| = \|\rho_{\theta, u}(v)\|$ ;

(b) l'angle de  $v$  à  $\rho_{\theta, u}(v)$  orienté par  $u$  est  $\theta$ .

**Remarque.** En bref, on appelle  $\rho_{\theta, u}$  la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $u$ .

Le résultat suivant nous dit comment calculer les rotations de  $\mathbb{R}^3$ .

**7.6.5. Théorème.** Soit  $L$  une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  engendrée par un vecteur  $u$ . Si  $\{v, w\}$  est une base orthogonale de  $L^\perp$  avec  $\det(uvw) > 0$ , alors

$$\left\{ u_1 = \frac{u}{\|u\|}, u_2 = \frac{v}{\|v\|}, u_3 = \frac{w}{\|w\|} \right\}$$



est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$[\rho_{\theta,u}]_{\{u_1,u_2,u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En particulier, toute rotation de  $\mathbb{R}^3$  est orthogonale.

**Exercice.** Donner la rotation  $\rho_{\theta,e_2}$  de  $\mathbb{R}^3$  d'angle  $\theta$  autour

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** La droite vectorielle  $L$  engendré par  $e_2$  est l'axe des  $y$ , dont  $\{e_2\}$  est une base orthonormée. Or  $L^\perp$  est le plan des  $x, z$ , dont  $\{e_1, e_3\}$  est une base orthonormée. Comme  $\det(e_2, e_1, e_3) = -1$ , on doit considérer la base orthonormée  $\{e_3, e_1\}$  de  $L^\perp$ . Maintenant,  $\{e_2, e_3, e_1\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  avec  $\det(e_2, e_3, e_1) > 0$ . D'après le théorème 7.6.5, on a

$$[\rho_{\theta,e_2}]_{\{e_2,e_3,e_1\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\rho_{\theta,e_2}(e_2) = (e_2, e_3, e_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rho_{\theta,e_2}(e_3) = (e_2, e_3, e_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = 0e_2 + (\cos \theta)e_3 + (\sin \theta)e_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$\rho_{\theta,e_2}(e_1) = (e_2, e_3, e_1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = 0e_2 + (-\sin \theta)e_3 + (\cos \theta)e_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

D'où

$$[\rho_{\theta,e_2}]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = P_{\{e_1,e_2,e_3\}}^{\{\rho_{\theta,e_2}(e_1), \rho_{\theta,e_2}(e_2), \rho_{\theta,e_2}(e_3)\}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,  $\rho_{\theta,e_2}$  est de la forme

$$\rho_{\theta,e_2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Voici un procédé pour calculer une rotation de  $\mathbb{R}^3$ , ce qui est une conséquence du lemme 7.2.6, le corollaire 7.3.5, le théorème 7.6.5, et le théorème 5.3.4.

**7.6.6. Théorème.** Soit  $L$  une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  engendrée par un vecteur  $u$ . On veut calculer la rotation  $\rho$  autour de  $L$  d'angle  $\theta$  orienté par  $u$ .

- (1) On trouve  $v \in \mathbb{R}^3$  non nul avec  $\langle u, v \rangle = 0$ .
- (2) On calcule  $w = u \wedge v$ .
- (3) On obtient une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  suivante:

$$\left\{ u_1 = \frac{u}{\|u\|}, u_2 = \frac{v}{\|v\|}, u_3 = \frac{w}{\|w\|} \right\}.$$

- (4) D'après le théorème 7.6.5, on a

$$[\rho]_{\{u_1, u_2, u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} =: A.$$

- (5) Comme  $P = (u_1 u_2 u_3)$  est orthogonale, d'après le théorème 5.3.4, on a

$$[\rho]_{\{e_1, e_2, e_3\}} = PAP^T.$$

**Exercice.** Soit  $L$  la droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  engendrée par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la rotation  $\rho$  autour de  $L$  d'angle  $\frac{\pi}{3}$  orienté par  $u$ .

**Solution.** Les vecteurs orthogonaux à  $u$  sont les solutions de l'équation suivante:

$$x + y + z = 0.$$

Posant  $y = 1$  et  $z = 0$ , on trouve  $x = -1$ . Ceci donne un vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\langle v, u \rangle = 0$ . Maintenant, calculons

$$w = u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$[\rho]_{\{u_1, u_2, u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} := A.$$

Posant

$$P = (u_1 \ u_2 \ u_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$[\rho]_{\{e_1, e_2, e_3\}} = PAP^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, la formule en coordonnées canonique de  $\rho$  est donnée par

$$\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 2x + 2y - z \\ -x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

On conclut cette section par une application dans la stéréovision.

**7.6.7. Théorème.** Soit  $M$  un objet situé à la position

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

dans un repère caméra initial de  $\mathbb{R}^3$ . Si l'on tourne la caméra d'angle  $\theta$  autour d'un vecteur non nul  $u$ , alors la position de  $M$  dans le nouveau repère caméra est donnée par

$$B^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

où  $B$  est la matrice de  $\rho_{\theta, u}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique.

**Exercice.** Dans un repère caméra initial de  $\mathbb{R}^3$ , un objet  $M$  est situé à la position

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On tourne la caméra d'angle  $\frac{\pi}{3}$  autour du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la position de  $M$  dans le nouveau repère caméra de  $\mathbb{R}^3$ .

**Solution.** Désignons par  $\rho$  la rotation de  $\mathbb{R}^3$  d'angle  $\frac{\pi}{3}$  autour de  $u$ . On a vu que

$$[\rho]_{\{e_1, e_2, e_3\}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =: B.$$

D'après le théorème 7.6.7, dans le nouveau repère caméra,  $M$  est à la position suivante:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

## 7.7. Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et par Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales à un modèle mathématique censé décrire ces données.

**7.7.1. Définition.** Soit un système d'équations linéaires

$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Un vecteur  $S \in \mathbb{R}^n$  s'appelle *solution à moindres carrés* de ce système si

$$\|AS - B\| \leq \|Au - B\|$$

pour tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$ .

**Remarque.** Si le système  $AX = B$  est compatible, alors une solution à moindres carrés est une solution exacte.

Le résultat suivant nous donne une méthode très pratique pour trouver les solutions à moindres carrés d'un système d'équations linéaires.

**7.7.2. Théorème.** Soit un système d'équations linéaires

$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Un vecteur  $S \in \mathbb{R}^n$  est une solution à moindres carrés de ce système si, et seulement si,  $S$  est une solution exacte du système compatible suivant:

$$(A^T A)X = A^T B.$$

**Exercice.** Trouver une solution à moindres carrés du système suivant:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y + 2z &= 1 \\ -2x + 4y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

**Solution.** D'abord, on a que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$C = A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -2 \\ -8 & 18 & 10 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } D = A^T B = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Or  $(C|D)$  s'échelonne à la matrice suivante:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -4 \\ 0 & 11 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Posant  $z = 0$ , on obtient une solution à moindres carrés du système original suivante:

$$S = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 94 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$AS = -\frac{4}{11} \begin{pmatrix} 21 \\ 26 \\ -34 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale de  $B$  sur  $\mathcal{C}(A)$ .

Si  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  est de rang  $n$ , alors  $A^T A$  est définie positive. En particulier,  $A^T A$  est inversible. Cette observation nous donne le résultat suivant.

**7.7.3. Corollaire.** Soit un système d'équations linéaires

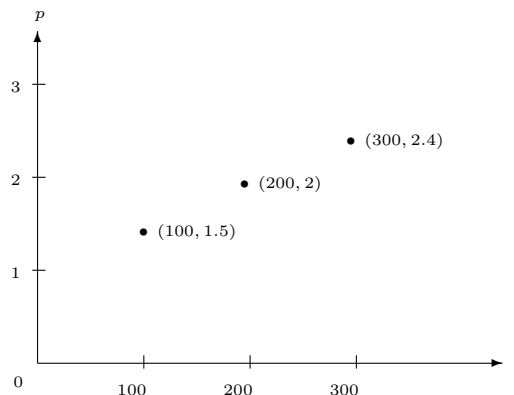
$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Si  $\text{rg}(A) = n$ , alors le système admet une seule solution à moindres carrés donnée par

$$S = (A^T A)^{-1} A^T B.$$

Dans la pratique, on décrira la relation entre deux variables  $x$  et  $y$  selon des données observées. Ces données observées sont représentées par des points du plan. S'ils ont tendance à former une droite, on peut trouver une droite qui correspond le mieux à ces points.

**Exercice.** En enregistrant la pression (en atm) d'un gaz à température (en Celsius) différente, on obtient les données suivantes:



Donner l'estimation de la pression du gaz à 400 degrés Celsius.

**Solution.** Comme les points ont tendance à former une droite, on va trouver une droite qui correspond le mieux les données observées. Supposons que  $p = at + b$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$ . D'après les données observées, on considère le système suivant:

$$\begin{aligned} 100a + b &= 1,5 \\ 200a + b &= 2 \\ 300a + b &= 2,4. \end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 200 & 1 \\ 300 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,4 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes, la matrice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 14 \times 10^4 & 6 \times 10^2 \\ 6 \times 10^2 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible, d'après le corollaire 7.7.3, le système a une seule solution à moindres carrés

$$S = (A^T A)^{-1}(A^T B) = \frac{1}{6 \times 10^4} \begin{pmatrix} 3 & -6 \times 10^2 \\ -6 \times 10^2 & 14 \times 10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12,7 \times 10^2 \\ 5,9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6 \times 10^4} \begin{pmatrix} 2,7 \times 10^2 \\ 6,4 \times 10^4 \end{pmatrix}.$$

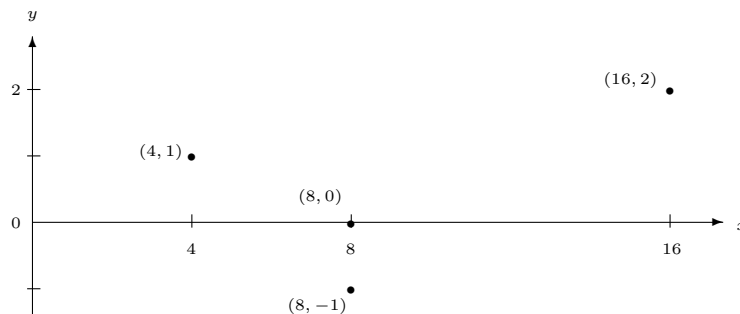
C'est-à-dire, la droite cherchée est définie par l'équation

$$p = \frac{2,7}{600}t + \frac{3,2}{3}.$$

Ainsi la pression sera environ 2,86 atm à la température 400 degrés Celsius.

Lorsque les points représentant des données expérimentales ont tendance à former une courbe, on peut trouver une fonction polynomiale qui correspond le mieux à ces points.

**Exercice.** Étant données des données expérimentales suivantes:



Donner une fonction polynomiale quadratique qui correspond le mieux à ces données.

**Solution.** On cherche une fonction  $x = a + by + cy^2$ . D'après les données observées, on obtient le système suivant:

$$\begin{aligned} a - b + c &= 8 \\ a &= 8 \\ a + b + c &= 4 \\ a + 2b + 4c &= 16. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \text{ et } A^T B = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 76 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes,  $A^T A$  est inversible. D'après le corollaire 7.7.3, le système admet une seule solution à moindres carrés suivante:

$$S = (A^T A)^{-1}(A^T B) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 11 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, la fonction polynomiale quadratique cherchée est définie par l'équation

$$x = 5 - y + 3y^2.$$

### 7.8. Exercices

1. Trouver le vecteur unitaire de même direction que le vecteur suivant:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dans chacun des cas suivants, calculer la distance entre  $u$  et  $v$ .

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dans chacun des cas suivants, calculer l'angle non orienté entre  $u$  et  $v$ .

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad (2) \quad u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Donner une base de  $F^\perp$ , où  $F$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



5. À l'aide du théorème 7.2.3(3), donner une base de  $\mathcal{C}(A)^\perp$ , où

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, à l'aide de la proposition 7.2.5, si les colonnes de  $A$  forment une base orthonormée ou non de  $\mathcal{C}(A)$ .

7. Vérifier, à l'aide de la proposition 7.2.5, que les colonnes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$ , où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Soient

$$A = (A_1 \ A_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) En calculant  $A^T A$ , vérifier que  $A_1, A_2$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$ .

(2) En calculant la projection orthogonale de  $v$  sur  $\mathcal{C}(A)$ , vérifier que  $v \in \mathcal{C}(A)$ .

(3) Donner la projection orthogonale de  $u$  sur  $\mathcal{C}(A)$ , et en déterminer si  $u$  appartient à  $\mathcal{C}(A)$  ou non.

9. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^4$  suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une base orthonormée du sous-espace vectoriel  $F$  engendré par  $u$ .

(2) Calculer la projection orthogonale de  $v$  sur  $F$ .

10. Déterminer si les vecteurs suivants forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  ou non:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

11. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $u_1, u_2, u_3$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base orthogonale de  $F$ .
- (2) Donner, à l'aide du lemme 7.2.6 une base orthonormée de  $F$ .
- (3) Donner la projection orthogonale de  $v$  sur  $F$ .

12. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , où

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) À l'aide du théorème 4.3.10, donner une base de  $F$ .
- (2) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, donner une base orthonormée de  $F$ .
- (3) Calculer  $\text{proj}_F v$ ; et en déterminer si  $v$  appartient au  $F$  ou non.

13. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathcal{C}(A)$ ;
- (2) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux bases trouvées en (1), donner une base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$ .

14. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathcal{C}(A)$ ;
- (2) Donner une base orthonormée de  $\mathcal{C}(A)$ ;
- (3) Donner une décomposition QR de  $A$ .

15. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} \\ \frac{16}{25} \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier, à l'aide du théorème 7.4.1, que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Trouver, à l'aide du théorème 7.4.4(1), la colonne des coordonnées de  $u$  dans  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

16. Trouver les valeurs de  $a, b, c$  telles que la matrice suivante soit orthogonale.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & c \end{pmatrix}.$$

17. Donner une décomposition QR de la matrice inversible suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Considérer la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer les produits vectoriels  $e_1 \wedge e_2$ ,  $e_2 \wedge e_3$  et  $e_3 \wedge e_1$ .

19. Dans chacun des cas suivants, à l'aide de la proposition 7.3.4(2), trouver un vecteur normal au plan  $P$  engendré par  $u, v$ , et en donner une équation pour  $P$ .

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad u = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

20. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner l'angle  $\theta$  de  $u$  à  $v$  orienté par  $u \wedge v$ .

(2) Donner l'angle  $\phi$  de  $u$  à  $v$  orienté par  $v \wedge u$ .

21. Dans chacun des cas suivants, diagonaliser la matrice symétrique donnée par une matrice orthogonale.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Déterminer si la transformation linéaire suivante est orthogonale ou non:

$$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

23. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice de la transformation linéaire  $T$  dans la base canonique; déterminer si  $T$  est orthogonale ou non; et si oui, donner son inverse en spécifiant la formule sous les coordonnées canoniques.

$$(1) \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b + 2c \\ 2a - 2b + c \\ -2a + b + 2c \end{pmatrix};$$

$$(2) T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \end{pmatrix}.$$

24. Soit  $\rho$  la rotation du plan d'angle  $\frac{7\pi}{6}$ .

- (1) Donner la matrice de  $\rho$  dans la base canonique  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Calculer l'image par  $\rho$  du rectangle de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

25. Donner la rotation de  $\mathbb{R}^3$  autour de l'axe des  $z$  d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  orienté par  $e_3$ .

26. Soit  $\rho$  la rotation de  $\mathbb{R}^3$  autour de l'axe des  $x$  d'angle  $\frac{5\pi}{3}$  orienté par le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Donner la matrice de  $\rho$  dans base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Calculer l'image par  $\rho$  du vecteur suivant

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

27. Soit  $L$  la droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  engendrée par le vecteur suivant:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer la rotation  $\rho$  de  $\mathbb{R}^3$  autour de  $L$  d'angle  $\frac{5\pi}{6}$  orienté par  $v$ , c'est-à-dire, donner la matrice de  $\rho$  dans la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .
- (2) Dans un repère caméra initial de  $\mathbb{R}^3$ , un objet  $M$  est situé à la position

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On tourne la caméra d'angle  $\frac{5\pi}{6}$  autour du vecteur  $v$ . Trouver la position de  $M$  dans le nouveau repère caméra de  $\mathbb{R}^3$ . *Indice:* Utiliser le résultat de la partie (1).

28. Dans chacun des cas suivants, trouver la solution à moindres carrés du système:

$$(1) \quad \begin{aligned} x & - z = 6 \\ 2x + y - 2z & = 1 \\ x + y & = 9 \\ x + y - z & = 3; \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 2x & - z = 0 \\ x - 2y + 2z & = 6 \\ 2x - y & = 0 \\ y - z & = 6. \end{aligned}$$

29. Trouver une solution à moindres carrés de chacun des systèmes suivants:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 & + 2x_4 = 2 \\ x_1 & - x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = 6 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 6; \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 4x_1 & + x_3 + 5x_4 = 9 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 & = 0 \\ 6x_1 + x_2 & + 7x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 & = 0. \end{aligned}$$

30. Trouver la droite  $y = a + bx$ , qui correspond le mieux les données observées suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

31. Trouver la courbe quadratique  $y = a + bx + cx^2$ , qui correspond le mieux les données observées suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$