Voici les consignes pour votre second devoir, à remettre le jeudi premier mars.

1 Exercices théoriques

Exercice 1 *[Convergence]* Démontrez le théorème 6.3 de l'article de Dennis et Moré.

Exercice 2 *[Gradient conjugué]* Exercice 3.6.5, 3.8.3 des notes.

Exercice 3 *[Admissibilité du pas unitaire]* Justifiez les affirmations suivantes. Si $\nabla^2 f(x^*)$ est une matrice définie positive, et si x_k est proche de x^*, alors

a) $\|\epsilon_k\| \sim \|\nabla f(x_k)\|$; il s'agit de montrer que $\|\epsilon_k\| \sim \mathcal{O}(\|\nabla f(x_k)\|)$ et $\|\nabla f(x_k)\| \sim \mathcal{O}(\|\epsilon_k\|)$

b) $\|\epsilon_k\| \sim \|d_N\|$;

c) si $\|r_k\| \sim \mathcal{O}(\|\epsilon_k\|^2)$, alors un pas unitaire demeure localement admissible. Modifiez légèrement la preuve du théorème 3.4.1 pour y incorporer r_k, puis constater que le même raisonnement demeure valable. Le pas $\theta = 1$ n'est plus forcément un minimum de $h_{x,d}(\theta)$ mais la condition sur r_k permet d'adapter la preuve.

d) sous quelles conditions sur $\|r_k\|$ l'adaptation de la preuve du théorème 3.4.1 en b) demeure-t-elle valable ? On cherche la condition la plus faible possible.

e) Si on utilise $\tau_0 = \frac{1}{2}$ dans le critère de Armijo, le pas unitaire dans la direction de Newton n'est plus forcément admissible même au voisinage d'une solution satisfaisant aux conditions suffisantes d'optimalité. Considérez la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{4}x^4$. Considérez la droite de Armijo $A(t) = h_{x_0,d}(0) + \tau_0 h'_{x_0,d}(0)t$, le polynôme de Taylor d'ordre 2 $q_{x_0}(d) = f(x_0) + f'(x_0)d + \frac{1}{2}f''(x_0)d^2$. Considérez $a = -0.1$ et montrez que pour $|x_0| \leq 1$, $d = -\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$, $A(1) = q(d)$ mais $f(x_0 + d) > A(1)$.

Exercice 4 *[Quasi Newton]* Vérifiez que les matrices obtenues par les formules BFGS et DFP sont définies positives si $\langle y, s \rangle > 0$ et H_0 et/ou B_0 est définie positive.