Principe de Dirichlet

Rencontres Putnam 2004
Université de Sherbrooke
Sylvain Bérubé

1. Théorie

On désire répartir un certain nombre de pigeons dans des cages. Or, il y a plus de pigeons que de cages. Alors nécessairement une des cages contiendra plus d'un pigeon. Cette affirmation se généralise joliment pour fournir un outil mathématique puissant. Il s'agit du principe de Dirichlet, également connu sous le nom du principe du pigeonnier - *pigeonhole principle* en anglais.

Principe de Dirichlet. Soient X et Y deux ensembles finis. Si $|X| > |Y|$, alors pour toute fonction $f : X \to Y$, il existe un élément de Y ayant plus d'un antécédent.

Démonstration: Supposons qu'il n'existe aucun élément de Y ayant plus d'un antécédent. Ainsi, X possède au maximum Y éléments, une contradiction avec le fait que $|X| > |Y|$.

Ce principe se généralise ainsi : si le nombre de pigeons est plus de k fois le nombre de cages, alors une des cages contiendra au moins $k+1$ pigeons.

Principe de Dirichlet (2e formulation)**.** Soient X et Y deux ensembles finis et soit k un entier. Si $|X| > k \cdot |Y|$, alors pour toute fonction $f : X \to Y$, il existe un élément de Y ayant plus de k antécédent.

Bien que ces faits soient plutôt évident, les appliquer à certains problèmes de façon intelligente permet de les résoudre efficacement.

Exemple 1.1. Prouve qu'il existe toujours un entier en base 10 composé uniquement de 0 et de 1 et qui est divisible par n.

Solution: Soit $X = \{1, 11, \ldots, 1 \cdots 1\}$, l'ensemble des n premiers nombres composés uniquement de 1. Supposons qu'aucun de ces nombres est divisible par n (autrement, la preuve se termine). Considérons $Y = \{1, \ldots, n-1\}$ et $f : X \to Y$ tel que $f(x) =$ (reste de la division de x par n). Puisque $|X| > |Y|$, on peut appliquer le principe de Dirichlet. Il existe donc $\{x_1, x_2\} \subseteq X$ tel que $f(x_i) = f(x_j)$. Puisque ces deux éléments ont le même reste lorsque divisé par n, leur différence est divisible par n. De plus, leur différence est composée uniquement de 0 et de 1. Ceci complète la preuve.

2. Problèmes sur le principe de Dirichlet

2.1. **Problèmes choisis.**

2.1.1. Prouve qu'au dernier souper Amatheus, il y avait deux matheux connaissant le même nombre de personne présente, en supposant que si A connaît B, alors B connaît A.

2.1.2 (Géométrie)**.**
a) Considère cinq points situés à l'intérieur d'un carré unitaire. Prouve que deux de ces points sont à une distance inférieure à $\sqrt{2}/2$.
b) Étant donné cinq points à l'intérieur d'un triangle équilatéral de côté 2, prouve qu'il y une paire de points distante d'au plus 1.
c) Cinquante et un points sont placés dans un carré unitaire. Prouve qu'il existe un cercle de rayon 1/7 contenant trois de ces points.
d) Considère quatre points à l'intérieure d'un triangle équilatérale de côté 14. Prouve que deux de ces points sont à une distance d'au plus 9. Est-ce que cette distance maximale peut être 8 ?
e) Dix-neuf points sont situés sur un hexagone régulier de côté 12. Prouve que deux d'entre eux sont éloignés d'au plus 7.

2.1.3 (Ensemble d'entiers)**.**
a) Soit S un ensemble contenant sept entiers compris entre 1 et 24. Prouve que les sommes des éléments d'au moins deux sous-ensembles de S sont les mêmes.
b) Soient $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble contenant n entiers. Prouve qu'il existe un sous-ensemble de S dont la somme de ses éléments est divisible par n.
c) Étant donné un ensemble de dix entiers compris entre 1 et 99 inclusivement, prouve qu'il existe deux sous-ensembles disjoints non-vides dont la somme de leurs éléments sera la même.
d) 67 numbers are chosen from the first 99 natural numbers. Prove that three of them must have a product which is a multiple of 6. Is the number 67 here the best possible ?
e) Prouve que toute collection de 31 entiers compris entre 1 et 60 a la propriété que l'un en divise un autre.
f) $n + 1$ nombres sont choisis parmis les $2n$ premiers nombres naturels. Prouve que trois d'entre eux (non nécessairement distinct) forment une solution à l'équation $x + y = z$. Également, construit un exemple montrant que l'affirmation est fausse si seulement n nombres sont choisis.
g) Prouve que la suite des 101 premiers entiers ne peut être permutée de sorte que la suite résultante ne contiennent pas de sous-suite de 11 nombres croissante ou décroissante.
h) 13 nombres sont choisis parmis les 100 premiers entiers. Prouve que trois d'entre eux forment un triangle, c'est-à-dire $x < z$, $y < z$ et $x + y > z$.

2.1.4 (Putnam 1980)**.** Démontre qu'il existe des entiers a, b, c non tous nuls et de valeur absolue inférieure à un million, tels que

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$$

2.1.5. Suppose qu'une équipe de soccer a marqué au moins un but dans 20 parties consécutives. Si elle marque un total de 30 buts dans ces 20 parties, prouve qu'à une certaine séquence de parties consécutives, elle a marqué exactement 9 buts.

2.1.6. Prouve que si un entier divise un nombre de Fibonacci, alors il en divisera une infinité.

2.1.7 (Putnam 1989)**.** Montre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout point P à l'intérieur d'un polygone régulier ayant $2n + 1$ cotés qui est inscrit dans un cercle de rayon 1, on peut trouver deux sommets du polygone dont leur distance à P diffère par moins de $1/n - \alpha/3$.

2.1.8 (Putnam 2000)**.** Soit B un ensemble de plus de $2^{n+1}/n$ points distincts avec des coordonnées de la forme $(\pm 1, \cdots, \pm 1)$ dans un espace à $n \geq 3$ dimensions. Montre qu'il y a trois points distincts dans B qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

2.1.9 (Putnam 1993)**.** Soit X un ensemble de dix-neuf entiers positifs plus petits ou égaux à 93 et soit Y un ensemble de quatre-vingt treize entiers positifs plus petits ou égaux à 19. Prouve qu'il existe un sous-ensemble non vide de X dont la somme des éléments est plus petite que celle d'un sous-ensemble de Y.

2.1.10 (Putnam 2002)**.** Cinq points sont placés à la surface d'une sphère. Prouve que quatre d'entre eux sont contenus dans un hémisphère fermé.

2.1.11 (Colorado Math Olympiad 1984)**.** 41 tours sont placés sur des cases distinctes d'un échiquier 10x10. Deux tours peuvent s'attaquer si elles sont sur la même rangée ou sur la même colonne de l'échiquier. Prouve qu'il existe un sous-ensemble de cinq tours tel qu'aucune des cinq ne peut en attaquer une autre du sous-ensemble.

2.1.12 (Carlson contest 2002)**.** Professor Ted Vessey, up late one night writing up lecture notes for Probability, sips from his coffee nine times. Each time, he places his coffee cup down on the paper, leaving a circular coffee ring two inches in diameter. The paper measures 10" by 16" (because what Vess knows about Probability won't fit on standard-size paper). Must there be some straight line which can be drawn across the paper passing through three rings ? (Some of the rings may possibly overlap each other, but all are completely on the paper, not even touching the edges.

2.2. **Problèmes supplémentaires.**

2.2.1.
(a) Prouve que dans tout groupe de six personnes, il y en a trois parmi eux qui sont soit des amis ou des étrangers mutuels.
(b) Dix-sept personnes correspondent par email, chacun correspondant avec tous les autres. Dans leurs messages, seulement trois sujets sont abordés et chaque paire de correspondents s'intéresse à un seul message. Prouve qu'il existe au moins trois personnes qui s'écrivent entre eux sur le même sujet.

2.2.2. La série de Fibonacci est définie récursivement ainsi :

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ pour } n > 2.$$

Montre que tout nombre entier m peut être écrit comme étant la somme de nombres de Fibonacci $m = f_{k_1} + \cdots + f_{k_r}$ tel que $0 << k_1 << \cdots << k_r$, où $a << b$ signifie $a + 1 < b$.

2.2.3 (Theorem of Dilworth)**.** Dans un ensemble partiellement ordonné de $mn + 1$ éléments, il existe une chaîne de $m+1$ éléments, ou un sous-ensemble de $n+1$ éléments qui sont incomparable entre eux.

2.2.4. Pour tout entier n, prouve qu'il existe toujours un entier en base 10 composé uniquement de 0 et de 1 et qui est divisible par n. Est-ce qu'il y en a une infinité ?

2.2.5. Défini $p_n := \lfloor en! \rfloor$ (le plus grand entier inférieur ou égal à $en!$). Prouve que tout graphe complet a $p_n + 1$ sommets, ayant ses arrêtes colorés avec n couleurs, contient un triangle monochrome.

2.2.6. Suppose $n \geq 2$ équipes de baseball jouent dans un tournoi. Si deux équipes ne s'affrontent jamais plus d'une fois, prouve qu'à la fin du tournoi, deux équipes auront joué le même nombre de parties.

2.2.7. Prouve qu'il existe deux puissances de 7 telles que leur différence est divisible par 2003.

2.2.8. Soient $a_1, \dots, a_6$ des entiers.
a) Considère les 15 différences $a_i - a_j$. Prouve qu'il en existe au moins deux divisibles par 3. Peux-tu prouver, qu'en fait, trois doivent l'être ?
b) Prouve qu'au moins une des différences $a_i - a_j$ est divisible par 5.
c) Prouve que $2^8 3^3 5 | \prod_{j<i}(a_j - a_i)$.

2.2.9. A *lattice point* is a point in the plane with integer coordinates.
a) Prove that among any five lattice points, there must be a pair, the midpoint of which is also a lattice point.
b) What happens in three or more dimensions ?

2.2.10. Prove that among any five points in the plane no three collinear, four must form a convex quadrilateral. If possible, generalize in higher dimension.

2.2.11. Prove that the decimal expansion of a rational number must eventually become periodic.

2.2.12. Prove that every natural number has some integer multiple whose digits consist of only 0s and 1s.

2.2.13. 11 students at a summer camp have formed five study groups. Prove that there must be two students, A and B, such that any study group containing A also contains B. How does this generalize ?

2.2.14 (CMO 1988)**.** Consider "Statement S" : Among any n points located inside or on the sides of a triangle T of area 1, there are always three points which are vertices of a triangle of area 1/4 or less.
a) Prove Statement S for $n = 9$.
b) Prove Statement S for $n = 7$.
c) Prove Statement S for $n = 5$.
d) Prove that Statement S is false for $n = 4$.

2.2.15. Let u be an irrational real number. Let S be the set of all real numbers of the form $a + bu$, where a and b are integers. Show that S is dense in the real numbers, i.e. for any real number x and any $\varepsilon > 0$, there is an element $y \in S$ such that $|x - y| < \varepsilon$.

3. Références